МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
ВОСТОЧНОУКРАИНСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени ВЛАДИМИРА ДАЛЯ

Рамазанов С. К.
Рязанцева Н. А.
Ляшенко Т. В.
Мусаева Э. К.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В МЕНЕДЖМЕНТЕ И МАРКЕТИНГЕ

Луганск 2008

УДК 519.876.5:658.5.012.42+658.8
Р 21

Рекомендовано Вченою радою
Східноукраїнського національного університету імені Володимира Даля

Відповідальний редактор:

____
____

Рецензенти:
Леві Л.І., доктор технічних наук, професор Луганського національного аграрного університету.
Клияненко Б. Т., доктор економічних наук, професор Луганського філіалу Інституту економіко - правових досліджень НАН України.

Рамазанов С. К. и др.
Р21 **Математичні моделі в менеджменті та маркетингу**: Навчальний посібник. - Луганськ: вид-во СНУ ім. В.Даля, 2006. - 207с.: табл. 44. іл. 30. бібліогр. 18 назв.

ISBN _________________

У навчальному посібнику розглянуті моделі лінійного та цілочисельного програмування, класичні методи оптимізації, моделі управління запасами та мережевого планування і управління, також значну увагу приділено питанням моделювання попиту та споживання, наведені елементи теорії прийняття рішень. Розглянуті декотрі питання застосування ЕОМ для рішення задач математичного програмування. Доводиться велика кількість економічних задач з рішенням та для самостійного розв’язування

Для керівників підприємств, наукових працівників, викладачів, аспірантів та студентів.

УДК 519.876.5:658.5.012.42+658.8

ISBN ______________

СОДЕРЖАНИЕ

1. ЗАДАЧИ МАРКЕТИНГА И МЕНЕДЖМЕНТА КАК ОБЪЕКТ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Особенности экономико-математического моделирования в области маркетинга в основном определяются задачами и функциями этой сферы деятельности предприятий и фирм в условиях рыночной экономики. Маркетинг рассматривается как система взглядов, функция координации различных аспектов коммерческой деятельности, философия бизнеса, процесс балансирования спроса и предложения и т.д. Например, многие специалисты определяют маркетинг как функцию администрации фирмы, состоящую в организации и управлении всем комплексом деловой деятельности, связанной с выявлением и превращением покупательной способности потребителя в реальный спрос на определенный товар или услугу, а также с доведением данного товара или данной услуги до конечного потребителя, с тем чтобы обеспечить получение намеченной фирмой прибыли или достижение иных целей.

Перед маркетингом как рыночной концепцией управления стоят следующие задачи:

- тщательно и всесторонне изучать рынок, спрос, вкусы и желания потребителей;
- приспосабливать производство к этим требованиям, выпускать товары и оказывать услуги, соответствующие спросу;
- воздействовать на рынок, общественный спрос в интересах фирмы.

Названные задачи определяют следующие функции маркетинга:

аналитическая – включает изучение рынка, потребителей, фирменной структуры рынка, структуры товара, внутренней среды (предприятия, фирмы);

производственная – предполагает организацию производства новых товаров, материально-технического снабжения, управление качеством и конкурентоспособностью товарной продукции;

сбытовая – имеются в виду организация сервиса и движения товаров, проведение товарной и ценовой политики;

управление и контроль – предполагает планирование, информационное обеспечение маркетинга, коммуникационное обеспечение управления маркетингом, ситуационный анализ.

Перечисленные задачи и функции маркетинга определяют методические основы исследования маркетинга, включающие в себя общенаучные методы (системный анализ, комплексный подход, программно-целевое планирование), аналитико-прогностические методы (математическое программирование, теория вероятностей, теория массового обслуживания, экономико-статистические методы, теория связи, сетевое планирование, методы экспертных оценок и др.), а также методы, заимствованные из других областей знаний, таких как социология, психология, экология, эстетика и др. Указанные методические основы исследования маркетинга, в первую очередь общенаучные и аналитико-математические, определяют особенности применения экономико-математического моделирования в области маркетинга. Рассмотрим некоторые из названных методов в части использования их для решения конкретных маркетинговых задач.

Математическое программирование, в частности, линейное программирование как математический метод выбора из ряда альтернативных решений наиболее благоприятного (с наименьшими затратами, максимальной прибылью и т.п. при прочих равных условиях), применяется при ограниченных ресурсах, расчете оптимальной величины товарных запасов, планировании маршрутов движения сбытовых агентов и др.

Методы теории вероятностей помогают принимать такого рода решения, которые сводятся к определению значения вероятностей наступления определенных событий, математического ожидания той или иной случайной величины и т.п. В частности, речь может идти о следующем: производить или нет тот или другой товар, расширять или реорганизовывать производство, выходить на рынок или нет и т.д.

Методы теории массового обслуживания применяются при решении задач о выборе очередности обслуживания заказчиков, при составлении графиков поставок товаров и в других нелогичных случаях. Эти методы дают возможность изучить складывающиеся закономерности, связанные с наличием потока заявок на обслуживание, и соблюсти необходимую очередность выполнения таких заявок, например, с учетом приоритета обслуживания.

Теория связи, рассматривающая механизм обратных связей, дает возможность получить сигнальную информацию о процессах, выходящих за пределы установленных параметров маркетинговой деятельности. Это позволяет управлять товарными запасами (управление поступлениями и отгрузками), процессами производства и сбыта (увязка производственных мощностей с возможностями сбыта). Применение таких методов к организационным структурам маркетинга помогает совершенствовать связь предприятий и фирм с рынком, повысить эффективность использования получаемых данных о процессе производства и сбыта.

Балансовые методы и модели позволяют решить задачи сбалансированности товарного предложения и спроса. Эти методы модели могут оказаться полезными при решении ряда вопросов ценовой политики и ценообразования.

Методы сетевого планирования дают возможность регулировать последовательность и взаимозависимость отдельных видов работ или операций в рамках какой-либо программы. Они позволяют четко фиксировать основные этапы работы, определять и согласовывать сроки их выполнения, разграничивать ответственность, предусматривать возможные отклонения. Использование методов сетевого планирования и управления может быть достаточно эффективным при решении таких задач маркетинга, как выпуск нового товара, организация пробных продаж, подготовка и проведение сбытовых и рекламных кампаний и др.

Разрешению реальных маркетинговых ситуаций могут в значительной мере помочь методы теории игр. Упрощенные модели поведения конкурентов, стратегии выхода на новые рынки и т.п. могут предварительно «проигрываться для нахождения оптимальных решений. Особое значение в задачах маркетинга имеют методы теории игр для принятия решений в условиях неопределенности риска.

Важное место в методическом арсенале маркетинга занимают методы экспертных оценок. Они дают возможность достаточно быстро получить обоснованный ответ на вопрос о возможных процессах развития тех или иных событий на рынке, выявить сильные и слабые стороны предприятия, получить оценку эффективности маркетинговых мероприятий и т.д. В частности, для решения задач маркетинга широко используются методы мозговой атаки, «Дельфи» и др. Использование экспертизы является достаточно авторитетным и перспективным методом, если правильно сформирована экспертная группа, проведена процедура экспертных оценок, выбраны методы обработки результатов экспертизы.

Названные методы не исчерпывают, конечно, всего арсенала, используемого при экономико-математическом моделировании задач маркетинга.

2. МОДЕЛИ МЕЖОТРАСЛЕВОГО БАЛАНСА В РЕШЕНИИ ЗАДАЧ МАРКЕТИНГА И МЕНЕДЖМЕНТА

2.1. Общие понятия балансового метода. Принципиальная схема межпродуктового баланса

Балансовые модели, как статистические, так и динамические, широко применяются при экономико-математическом моделировании экономических систем и процессов. В основе создания этих моделей лежит балансовый метод, т.е. метод взаимного сопоставления имеющихся материальных, трудовых и финансовых ресурсов и потребностей в них. Если описывать экономическую систему в целом, то под балансовой моделью понимается система уравнений, каждое из которых выражает требование баланса между производимым отдельными экономическими объектами количеством продукции и совокупной потребностью в этой продукции. При таком подходе рассматриваемая система состоит из экономических объектов, каждый из которых выпускает некоторый продукт, часть его потребляется другими объектами системы, а другая часть выводится за пределы системы в качестве ее конечного продукта. Если вместо понятия «продукт» ввести более общее понятие «ресурс», то под *балансовой моделью* следует понимать систему уравнений, которые удовлетворяют требованиям соответствия наличия ресурса и его использования.

Кроме приведенного выше требования соответствия производства каждого продукта и потребности в нем, можно указать такие примеры балансового соответствия, как соответствие наличия рабочей силы и количества рабочих мест, платежеспособного спроса населения и предложения товаров и услуг и т. д. При этом соответствие понимается либо как равенство, либо менее жестко – как достаточность ресурсов для покрытия потребности и, следовательно, наличие некоторого резерва.

Балансовый метод и создаваемые на его основе балансовые модели служат основным инструментом поддержания пропорций в экономике. Балансовые модели на базе отчетных балансов характеризуют сложившиеся пропорции, в них ресурсная часть всегда равна расходной. Для выявления диспропорций используются балансовые модели, в которых фактические ресурсы сопоставлялись бы не с их фактическим потреблением, а с потребностью в них. В связи с этим необходимо отметить, что балансовые модели не содержат какого-либо механизма сравнения отдельных вариантов экономических решений и не предусматривают взаимозаменяемости разных ресурсов, что не позволяет сделать выбор оптимального варианта развития экономической системы. Этим определяется ограниченность балансовых моделей и балансового метода в целом.

Основу информационного обеспечения балансовых моделей в экономике составляет матрица коэффициентов затрат ресурсов по конкретным направлениям их использования. Например, в модели межотраслевого баланса такую роль играет так называемая технологическая матрица – таблица межотраслевого баланса, составленная из коэффициентов (нормативов) прямых затрат на производство единицы продукции в натуральном выражении. По многим причинам исходные данные реальных хозяйственных объектов не могут быть использованы в балансовых моделях непосредственно, поэтому подготовка информации для ввода в модель является весьма серьезной проблемой. Так, при построении модели межотраслевого баланса используется специфическое понятие чистой (или технологической) отрасли, т.е. условной отрасли, объединяющей все производство данного продукта независимо от ведомственной (административной) подчиненности и форм собственности предприятий и фирм. Переход от хозяйственных отраслей к чистым отраслям требует специального преобразования реальных данных хозяйственных объектов, например, агрегирования отраслей, исключения внутриотраслевого оборота и др. В этих условиях понятия «межпродуктовый баланс» и «межотраслевой баланс» практически идентичны, отличие заключается лишь в единицах измерения элементов баланса.

Принципиальная схема межотраслевого баланса производства и распределения совокупного общественного продукта в стоимостном выражении приведена в таблице 2.1. В основу этой схемы положено разделение совокупного продукта на две части: промежуточный и конечный продукт; все народное хозяйство представлено в виде совокупности n отраслей (имеются в виду чистые отрасли), при этом каждая отрасль фигурирует в балансе как производящая и как потребляющая.

Таблица 2.1

Принципиальная схема межотраслевого баланса (МОБ)

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли					Конечный продукт	Валовой продукт
	1	2	3	…	n	Конечный продукт	Валовой продукт
1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	…	x_{1n}	Y_1	X_1
2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	…	x_{2n}	Y_2	X_2
3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	…	x_{3n}	Y_3	X_3
.	.	.	.		.	.	.
.	.	.	.	I	.	II	.
.	.	.	.		.	.	.
n	x_{n1}	x_{n2}	x_{n3}	…	x_{nn}	Y_n	X_n
Амортизация	c_1	c_2	c_3	…	c_n		
Оплата труда	v_1	v_2	v_3	III	v_n	IV	
Чистый доход	m_1	m_2	m_3	…	m_n		
Валовой продукт	X_1	X_2	X_3	…	X_n		$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{j=1}^{n} x_j$

Рассмотрим схему МОБ в разрезе его крупных составных частей. Выделяются четыре части, имеющие различное экономическое содержание, они называются квадрантами баланса и на схеме обозначены римскими цифрами.

Первый квадрант МОБ – это шахматная таблица межотраслевых материальных связей. Показатели, помещенные на пересечениях строк и столбцов, представляют собой величины межотраслевых потоков продукции и в общем виде обозначаются x_{ij}, где i и j – соответственно номера отраслей производящих и потребляющих. Так, величина x_{32} понимается как стоимость средств производства, произведенных в отрасли с номером 3 и потребленных в качестве материальных затрат в отрасли с номером 2. Таким образом, первый квадрант по форме представляет собой квадратную матрицу порядка n, сумма всех элементов которой равняется годовому фонду возмещения затрат средств производства в материальной сфере.

Во втором квадранте представлена конечная продукция всех отраслей материального производства, при этом под конечной понимается продукция, выходящая из сферы производства в область конечного использования (на потребление и накопление). В таблице 2.1 этот раздел дан укрупненно в виде одного столбца величин Y_j; в развернутой схеме баланса конечный продукт каждой отрасли показан дифференцированно по направлениям использования на личное потребление населения, общественное потребление, накопление, возмещение потерь, экспорт и др. Итак, второй квадрант характеризует отраслевую материальную структуру национального дохода, а в развернутом виде – также распределение национального дохода на фонд накопления и фонд потребления, структуру потребления и накопление по отраслям производства и потребителям.

Третий квадрант МОБ также характеризует национальный доход, но со стороны его стоимостного состава – как сумму чистой продукции и амортизации; чистая продукция понимается при этом как сумма оплаты труда и чистого дохода отраслей. Сумму амортизации (c_j) и чистой продукции $(v_j;\ m_j)$ некоторой j-й отрасли будем называть условно чистой продукцией этой отрасли и обозначать в дальнейшем Zj.

Четвертый квадрант баланса находится на пересечении столбцов второго квадранта (конечной продукции) и строк третьего квадранта (условно чистой продукции). Этим определяется содержание квадранта: он отражает конечное распределение и использование национального дохода. В результате перераспределения первоначально созданного национального дохода образуются конечные доходы населения, предприятий, государства. Данные четвертого квадранта важны для отражения в межотраслевой модели баланса доходов и расходов населения, источников финансирования капиталовложений, текущих затрат непроизводственной сферы, для анализа общей структуры конечных доходов по группам потребителей. Более детально составляющие элементы этого квадранта в данном пособии не рассматриваются, однако очень важным является тот факт, что общий итог четвертого квадранта, так же как второго и третьего, должен быть равен созданному за год национальному доходу.

Рассматривая схему баланса по столбцам, можно сделать очевидный вывод, что итог материальных затрат любой потребляющей отрасли и ее условно чистой продукции равен валовой продукции этой отрасли. Данный вывод можно записать в виде соотношения:

$$X_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} + Z_j; \qquad j = \overline{1,n}. \tag{2.1}$$

Напомним, что величина условно чистой продукции Zj равна сумме амортизации, оплаты труда и чистого дохода j-й отрасли. Соотношение (2.1) охватывает систему из n уравнений, отражающих стоимостный состав продукции всех отраслей материальной сферы.

Рассматривая схему МОБ по строкам для каждой производящей отрасли, можно видеть, что валовая продукция той или иной отрасли равна сумме материальных затрат потребляющих ее продукцию отраслей и конечной продукции данной отрасли:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + Y_i; \qquad i = \overline{1,n}. \tag{2.2}$$

Формула (2.2) описывает схему из n уравнений, которые называются уравнениями распределения продукции отраслей материального производства по направлениям использования. Просуммируем по всем отраслям уравнения (2.1), в результате получим:

$$\sum_{j=1}^{n} X_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} Z_j.$$

Аналогичное суммирование уравнений (2.2) дает:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + \sum_{i=1}^{n} Y_i.$$

Левые части обоих равенств равны, так как представляют собой весь валовой общественный продукт. Первые слагаемые правых частей этих равенств также равны, их величина равна итогу первого квадранта. Следовательно, должно соблюдаться соотношение:

$$\sum_{j=1}^{n} Z_j = \sum_{i=1}^{n} Y_i. \tag{2.3}$$

Левая часть уравнения (2.3) есть сумма третьего квадранта, а правая – итог второго квадранта. В целом же это уравнение показывает, что в межотраслевом балансе соблюдается важнейший принцип единства материального и стоимостного состава национального дохода.

2.2. Экономико-математическая модель межотраслевого баланса

Выше отмечено, что основу информационного обеспечения модели межотраслевого баланса составляет технологическая матрица, содержащая коэффициенты прямых материальных затрат на производство единицы продукции. Эта матрица является также основой экономико-математической модели межотраслевого баланса. Предполагается, что для производства единицы продукции в j-й отрасли требуется определенное количество затрат промежуточной продукции i-й отрасли, равное a_{ij}. Оно не зависит от объема производства в отрасли и является довольно стабильной величиной во времени. Величины a_{ij} называются *коэффициентами прямых материальных затрат* и рассчитываются следующим образом:

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j}; \qquad i, j = \overline{1, n}. \tag{2.4}$$

Определение 1. Коэффициент прямых материальных затрат показывает, какое количество продукции i-й отрасли необходимо, если учитывать только прямые затраты, для производства единицы продукции j-й отрасли.

С учетом формулы (2.4) систему уравнений баланса (2.2) можно переписать в виде:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j + Y_i; i, j = \overline{1, n_i} \cdot \tag{2.5}$$

Если ввести в рассмотрение матрицу коэффициентов прямых материальных затрат $A = (a_{ij})$, вектор-столбец валовой продукции X и вектор-столбец конечной продукции $У$:

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ .. \\ X_n \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ .. \\ Y_n \end{pmatrix},$$

то система уравнений (2.5) в матричной форме примет вид:

$$X = AX + Y. \tag{2.6}$$

Система уравнений (2.5), или в матричной форме (2.6), называется *экономико-математической моделью межотраслевого баланса (моделью Леонтьева, моделью «затраты - выпуск»).* С помощью этой модели можно выполнять три варианта расчетов:

- Задав в модели величины валовой продукции каждой отрасли (X_i), можно определить объемы конечной продукции каждой отрасли $(У_i)$:

$$У = (E - A)X. \tag{2.7}$$

- Задав величины конечной продукции всех отраслей $(У_i)$, можно определить величины валовой продукции каждой отрасли (X_i):

$$X = (E - A)^{-1} Y. \tag{2.8}$$

- Для ряда отраслей задав величины валовой продукции, а для всех остальных отраслей задав объемы конечной продукции, можно найти величины конечной продукции первых отраслей и объемы валовой продукции вторых, в этом варианте расчета удобнее пользоваться не матричной формой модели (2.6), а системой линейных уравнений (2.5).

В формулах (2.7) и (2.8) E обозначает единичную матрицу *n-го* порядка, а $(E - A)^{-1}$ – матрицу, обратную к матрице $(E - A)$. Если определитель матрицы $(E - A)$ не равен нулю, т.е. эта матрица невырожденная, то обратная к ней матрица существует. Обозначим эту обратную матрицу через $B=(E - A)^{-1}$, тогда систему уравнений в матричной форме (2.8) можно записать в виде:

$$X=BY. \tag{2.9}$$

Элементы матрицы B будем обозначать через b_{ij}, тогда из матричного уравнения (2.9) для любой i-й отрасли можно получить следующее соотношение:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} Y_i, \qquad i = \overline{1, n}. \tag{2.10}$$

Из соотношений (2.10) следует, что валовая продукция выступает как взвешенная сумма величин конечной продукции, причем весами являются коэффициенты b_{ij}, которые показывают, сколько всего нужно произвести продукции i-й отрасли для выпуска в сферу конечного использования единицы продукции j-й отрасли. В отличие от коэффициентов прямых затрат a_{ij} коэффициенты b_{ij} называются *коэффициентами полных материальных затрат* и включают в себя как прямые, так и косвенные затраты всех порядков. Если прямые затраты отражают количество средств производства, израсходованных непосредственно при изготовлении данного продукта, то косвенные относятся к предшествующим стадиям производства и входят в производство продукта не прямо, а через другие (промежуточные) средства производства.

Определение 2. Коэффициент полных материальных затрат b_{ij} показывает, какое количество продукции i-й отрасли нужно произвести, чтобы с учетом прямых и косвенных затрат этой продукции получить единицу конечной продукции j-й отрасли.

Коэффициенты полных материальных затрат можно применять, когда необходимо определить, как скажется на валовом выпуске некоторой отрасли предполагаемое изменение объемов конечной продукции всех отраслей:

$$\Delta X_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \Delta Y_i, \tag{2.11}$$

где ΔX_i и ΔY_i – изменения (приросты) величин валовой и конечной продукции соответственно.

2.3. Коэффициенты прямых и полных материальных затрат

Переходя к анализу модели межотраслевого баланса, необходимо прежде всего рассмотреть основные свойства матрицы коэффициентов прямых материальных затрат A. Коэффициенты прямых затрат по определению являются неотрицательными, следовательно, матрица A в целом может быть названа неотрицательной: $A \geq 0$. Так как процесс воспроизводства нельзя было бы осуществлять, если бы для собственного воспроизводства в отрасли затрачивалось большее количество продукта, чем создавалось, то очевидно, что диагональные элементы матрицы A меньше единицы: $a_{ij} < 1$.

Система уравнений межотраслевого баланса является отражением реальных экономических процессов, в которых содержательный смысл могут иметь лишь неотрицательные значения валовых выпусков. Таким образом, вектор валовой продукции состоит из неотрицательных компонентов и называется неотрицательным: $X \geq 0$. Встает вопрос, при каких условиях экономическая система способна обеспечить положительный конечный выпуск по всем отраслям? Ответ на этот вопрос связан с понятием продуктивности матрицы коэффициентов прямых материальных затрат.

Будем называть неотрицательную матрицу *A продуктивной,* если существует такой неотрицательный вектор $X \geq 0$, что

$$X > AX. \tag{2.12}$$

Очевидно, что условие (2.12) означает существование положительного вектора конечной продукции $У > 0$ для модели межотраслевого баланса (2.6).

Для того чтобы матрица коэффициентов прямых материальных затрат A была продуктивной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из перечисленных ниже условий:

1) матрица $(E - A)$ неотрицательно обратима, т.е. существует обратная матрица $(E - A)^{-1} \geq 0;$

2) матричный ряд $E + A + A_2 + A_s + ... = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$ сходится, причем его сумма равна обратной матрице $(E - A)^{-1}$;

3) наибольшее по модулю собственное значение λ матрицы A, то есть решение характеристического уравнения $|\lambda E - A| = 0$, строго меньше единицы;

4) все главные миноры матрицы $(E\text{-}A)$, т.е. определители матриц, образованные элементами первых строк и первых столбцов этой матрицы, порядка от 1 до n, положительны.

Более простым, но только достаточным признаком продуктивности матрицы A является ограничение на величину ее нормы, т.е. на величину наибольшей из сумм элементов матрицы A в каждом столбце. Если норма матрицы A строго меньше единицы, то эта матрица продуктивна; повторим, что данное условие является только достаточным, и матрица A может оказаться продуктивной и в случае, когда ее норма больше единицы.

Наибольший по модулю корень характеристического уравнения, приведенного в условии 3 продуктивности матрицы A (обозначим его через λ^*), может служить оценкой общего уровня коэффициентов прямых материальных затрат, а следовательно, величина $1\text{-}\lambda^*$ характеризует остаток после затрат, т.е. продуктивность. Чем больше $1 - \lambda^*$, тем больше возможности достижения других целей, кроме текущего производственного потребления. Другими словами, чем выше общий уровень коэффициентов матрицы A, тем больше наибольшее по модулю собственное значение λ^* и ниже уровень продуктивности, и наоборот, чем ниже общий уровень коэффициентов матрицы A, тем меньше наибольшее по модулю собственное значение и выше продуктивность.

Перейдем к анализу матрицы коэффициентов полных материальных затрат, т.е. матрицы $B = (E - A)^{-1}$. Согласно определению 2.2, коэффициент этой матрицы показывает, сколько всего нужно произвести продукции i-й отрасли, чтобы получить единицу конечной продукции j-й отрасли.

Дадим другое определение коэффициента полных материальных затрат, исходя из того, что кроме прямых существуют косвенные затраты той или иной продукции при производстве продукции данной отрасли. Рассмотрим в качестве примера формирование затрат электроэнергии на выпуск стального проката, при этом ограничимся технологической цепочкой «руда-чугун-сталь-прокат». Затраты электроэнергии при получении проката из стали будут называться прямыми затратами, те же затраты при получении стали из чугуна будут называться косвенными затратами 1-го порядка, а затраты электроэнергии при получении чугуна из руды будут называться косвенными затратами электроэнергии на выпуск стального проката 2-го порядка и т. д. В связи со сказанным выше имеет место следующее определение.

Определение 3. Коэффициентом полных материальных затрат c_{ij} называется сумма прямых затрат и косвенных затрат продукции i-й отрасли для производства единицы продукции j-й отрасли через все промежуточные продукты на всех предшествующих стадиях производства. Если коэффициент косвенных материальных затрат k-го порядка обозначить через $a_{ij}^{(k)}$, то имеет место формула:

$$c_{ij} = a_{ij} + a_{ij}^{(1)} + a_{ij}^{(2)} + \ldots + a_{ij}^{(k)} + \ldots, \tag{2.13}$$

а если ввести в рассмотрение матрицу коэффициентов полных материальных затрат $C = (c_{ij})$ и матрицы коэффициентов косвенных материальных затрат различных порядков $A^{(k)} = (a_{ij}^{(k)})$, то поэлементную формулу (2.13) можно записать в более общем матричном виде:

$$C = A + A^{(1)} + A^{(2)} + \ldots + A^{(k)} + \ldots. \tag{2.14}$$

Исходя из содержательного смысла коэффициентов косвенных материальных затрат, можно записать ряд матричных соотношений:

$$A^{(1)} = AA = A^2\,;\; A^{(2)} = AA^{(1)} = AA^2 = A^3\,;$$
$$A^{(k)} = AA^{(k-1)} = AA^k = A^{k+1}\,,$$

с использованием которых матричная формула (2.14) может быть переписана в следующем виде:

$$C = A + A^2 + A^3 + \ldots + A^{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} A^k. \qquad (2.15)$$

Если матрица коэффициентов прямых материальных затрат А является продуктивной, то из условия 2) продуктивности существует матрица $B=(E-A)^{-1}$, являющаяся суммой сходящегося матричного ряда:

$$B = (E - A)^{-1} = E + A + A^2 + A^3 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} A^k. \qquad (2.16)$$

Из сопоставления соотношений (2.15) и (2.16) устанавливается следующая связь между двумя матрицами коэффициентов полных материальных затрат:

$$B = E + C,$$

или в поэлементной записи:

$$b_{ij} = \begin{cases} c_{ij}, \text{ если } i \neq j, \\ 1 + c_{ij}, \text{ если } i = j. \end{cases}$$

Данная связь определяет экономический смысл различия между коэффициентами матриц B и C: в отличие от коэффициентов матрицы C, учитывающих только затраты на производство продукции, коэффициенты матрицы B включают в себя, кроме затрат, также саму единицу конечной продукции, которая выходит за сферу производства.

Перейдем теперь к вычислительным аспектам решения задач на основе модели межотраслевого баланса. Основной объем расчетов по этой модели связан с вычислением матрицы коэффициентов полных материальных затрат B. Если матрица коэффициентов прямых материальных затрат A задана и является продуктивной, то матрицу B можно находить либо по формулам обращения матриц, рассматриваемым в курсе матричной алгебры, либо приближенным способом, используя разложение в матричный ряд (2.16).

Пример 1. Для трехотраслевой экономической системы заданы матрица коэффициентов прямых материальных затрат и вектор конечной продукции:

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}0 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{pmatrix}; \qquad Y = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 300 \end{pmatrix}.$$

Найти коэффициенты полных материальных затрат и вектор валовой продукции, заполнить схему межотраслевого материального баланса.

Для этого можно воспользоваться описанными двумя способами или облегчить решение, применив «электронные таблицы». Пойдём по легкому пути.

1. Определим матрицу коэффициентов полных материальных затрат.

а) находим матрицу *(E -A):*

$$(E-A)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0{,}3&0{,}1&0{,}4\\0{,}2&0{,}5&0{,}0\\0{,}3&0{,}1&0{,}2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}7&-0{,}1&-0{,}4\\-0{,}2&0{,}5&0{,}0\\-0{,}3&-0{,}1&0{,}8\end{pmatrix};$$

б) обратную матрицу $(E-A)^{-1}$ вычисляем в Excel с помощью функции МОБР:

$$B=(E-A)^{-1}=\begin{pmatrix}2{,}041&0{,}612&1{,}020\\0{,}816&2{,}245&0{,}408\\0{,}867&0{,}510&1{,}684\end{pmatrix}.$$

2. Найдем величины валовой продукции трех отраслей (вектор X), используя формулу (2.8):

$$X=BY=\begin{pmatrix}2{,}041&0{,}612&1{,}020\\0{,}816&2{,}245&0{,}408\\0{,}867&0{,}510&1{,}684\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}200\\100\\300\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}775{,}3\\510{,}1\\729{,}6\end{pmatrix}.$$

3. Для определения элементов первого квадранта материального межотраслевого баланса воспользуемся формулой, вытекающей из формулы (2.4): $x_{ij} = a_{ij}X_j$. Из этой формулы следует, что для получения первого столбца первого квадранта нужно элементы первого столбца заданной матрицы A умножить на величину $X_1 = 775{,}3$; элементы второго столбца матрицы A умножить на $X_2 = 510{,}1$; элементы третьего столбца матрицы A умножить на $X_3 = 729{,}6$.

Составляющие третьего квадранта (условно чистая продукция) находятся с учетом формулы (2.1) как разность между объемами валовой продукции и суммами элементов соответствующих столбцов найденного первого квадранта.

Четвертый квадрант в нашем примере состоит из одного показателя и служит, в частности, для контроля правильности расчета: сумма элементов второго квадранта должна в стоимостном материальном балансе совпадать с суммой элементов третьего квадранта. Результаты расчета представлены в таблице 2.2.

Таблица 2.2

Межотраслевой баланс производства и распределения продукции

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли				
	1	2	3	Конечная продукция	Валовая продукция
1	232,6	51,0	291,8	200,0	775,3
2	155,1	255,0	0,0	100,0	510,1
3	232,6	51,0	145,9	300,0	729,6
Условно чистая продукция	155,0	153,1	291,9	600,0	
Валовая продукция	775,3	510,1	729,6		2015,0

2.4. Применение балансовых моделей

Одной из главных функций маркетинга является производственная, которая предполагает в первую очередь организацию материально-технического снабжения на основе анализа хозяйственных связей. Основным видом моделей согласования ресурсов и потребностей в материально-техническом снабжении являются балансовые модели, аналогичные рассмотренной выше модели межотраслевого баланса в стоимостном выражении. Чаще всего используются межпродуктовые балансы в натуральном выражении, в которых первый раздел отражает источники формирования ресурсов продукции, а второй показывает направления использования ресурсов на текущее производственное потребление и конечное потребление. Эти балансы позволяют определить потребность в продукции каждой отрасли и взаимоувязанные объемы производства продукции, обеспечивают согласование ресурсов с потребностью на всех стадиях переработки продукции с учетом прямых и косвенных связей.

В общем виде модель межпродуктового баланса имеет вид:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_i + Y_i; i = 1,2,..., n, \tag{2.17}$$

что по форме совпадает с моделью (2.5) межотраслевого баланса в стоимостном выражении, однако здесь все величины приведены в натуральных измерителях. Для примера приведем значения некоторых коэффициентов прямых материальных затрат a_{ij}: на изготовление одного грузового автомобиля расходуется в среднем 2,5 т стального проката, 0,5 т чугуна, 2 тыс. кВт • ч. электроэнергии, 1 м^3 пиломатериалов и т. д.

Рассмотрим решение одной из задач маркетинга на основе модели межпродуктового баланса. В моделях межпродуктовых балансов в состав объема конечной продукции Y_i входит количество продукции, направляемой на прирост запасов и резервов. Величина этого прироста по каждой продукции часто задается вне модели, что определяет общее количество продукции каждого наименования, идущее на прирост запасов, но не дает возможности узнать, в каком объеме требуются эти запасы для обеспечения непрерывности производства, какова оптимальная величина совокупных запасов для данной продукции. Для того чтобы получить ответ на эти вопросы, необходимо наряду с прямыми затратами отражать величину запасов и резервов в том разделе баланса, где по строкам показываются производственные связи и затраты одного вида продукта на все другие виды, а по столбцам – затраты различных продуктов на производство продукта данного определенного вида.

Эти проблемы можно решить путем введения так называемых коэффициентов запасоемкости.

Дадим **определение 4**: коэффициент запасоемкости s_{ij} показывает, какое количество запаса продукции i-го вида необходимо при производстве единицы продукции j-го вида. Если S_{ij}, есть величина запаса продукции i-го вида, используемого для производства i-ой продукции, а X_j – общий объем производства j-ой продукции, то величину коэффициента запасоемкости можно определить по формуле:

$$s_{ij} = \frac{S_{ij}}{X_j}; i, j = 1,2,..., n. \tag{2.18}$$

На практике коэффициенты запасоемкости можно рассчитать на основе статистических данных за предыдущие годы.

Если в схему межпродуктового баланса ввести показатели запасоемкости, то уравнение (2.17) примет вид:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_i + \sum_{j=1}^{n} s_{ij} X_j + Y_i; i = 1,2,...,n. \quad (2.19)$$

Введя наряду с ранее использованными матричными величинами матрицу коэффициентов запасоемкости $S = (s_{ij})$, можно модель (2.19) записать в матричном виде:

$$X=A *X + S*X + Y, \quad (2.20)$$

откуда выводится соотношение:

$$X = (E-A-S)^{-1}*Y. \quad (2.21)$$

Матрица $B^s = (E -A- S)^{-1}$ аналогична матрице B коэффициентов полных материальных затрат, но включает в себя наряду с прямыми и косвенными затратами также затраты запасов на единицу конечной продукции.

Балансовые модели могут быть полезны и при реализации сбытовой функции маркетинга, в частности, в вопросах ценообразования. В условиях формирования рыночных цен эти модели помогают выявить, например, дисбаланс межотраслевых и внутриотраслевых цен при свободном рыночном ценообразовании. Рассмотрим прежде всего задачу расчета системы цен по формуле стоимости на основе межотраслевого баланса.

В дополнение к ранее принятым обозначениям введем через t_j коэффициент прямых затрат труда в j-ой отрасли; цену единицы j-го продукта – через P_j; денежный эквивалент новой стоимости, созданной в единицу рабочего времени, – через P_t; нормативную ставку оплаты единицы рабочего времени – через V_n; норму прибавочного продукта по отношению к необходимому (норму прибыли) – через a. Тогда в балансе для каждого j-го продукта должно соблюдаться равенство:

$$P_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} P_j + t_j P_i; j = 1,2,...,n. \quad (2.22)$$

Соотношения (2.22) представляют собой систему n линейных уравнений *с (n + 1)* неизвестными. Задавая значение одной из неизвестных, можно определить все остальные цены, решая получившуюся систему уравнений любым из известных методов.

Для величины P_t справедлива следующая формула:

$$P_t = V_H (1+\alpha). \quad (2.23)$$

Считая величину нормативной ставки оплаты единицы рабочего времени (единицы затрат труда) V_H известной, нормировать коэффициент а можно путем присоединения к системе уравнений (2.22) дополнительного *(n + 1)*-го уравнения, используя объемные показатели межотраслевого баланса. Полагая для простоты, что сумма доходов населения, не занятого в производственной сфере, равна нулю, это уравнение можно записать в следующем виде:

$$V_н \cdot \sum_{j=1}^{n} X_j \cdot t_j = \sum_{j=1}^{n} P_j \cdot Y_j. \tag{2.24}$$

Это уравнение отражает требование соответствия доходов населения и общей стоимости товаров конечного потребления.

Кроме определения системы цен, по формуле стоимости на базе уравнений межотраслевого баланса можно рассчитывать новые перспективные цены и индексы их динамики в сравнении с уровнями базисного года. Пусть в действующих отраслевых ценах объем прямых межотраслевых поставок, объем валовой продукции, коэффициент прямых материальных затрат и условно-чистый доход для j-ой отрасли были равны соответственно x_{ij}, X_j, a_{ij}, Z_j, а аналогичные величины в новых перспективных ценах равны $x_{ij}*$, X_j*, $a_{ij}*$, Z_j*.

Введем в рассмотрение коэффициенты распределения продукции

$$h_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j}; i, j = 1,2,..., n, \tag{2.25}$$

показывающие долю продукции i-ой отрасли, затраченную в качестве текущих затрат на выпуск продукции j-ой отрасли.

Матрица коэффициентов распределения $H = (h_{ij})$ не зависит от изменения отраслевых уровней цен. Если обозначить через r_i индекс изменения цены продукции i-ой отрасли

$$r_i = \frac{X_i^*}{X_i} = \frac{x_{ij}^*}{x_{ij}},$$

то очевидны следующие равенства:

$$h_{ij}^* = \frac{x_{ij}^*}{X_j^*} = \frac{r_i \cdot x_{ij}}{r_i \cdot X_j} = \frac{x_{ij}}{X_j} = h_{ij}. \tag{2.26}$$

Для полностью сбалансированного межотраслевого баланса по столбцам первого и третьего квадрантов должно выполняться следующее соотношение:

$$X_j^* = \sum_{j=1}^{n} x_{ij}^* + Z_j^*;\ j = 1,2,...,n,$$

которое с учетом равенства (2.26) можно переписать в виде:

$$X_j^* = \sum_{j=1}^{n} X_j^* \cdot h_{ij} + Z_j^*;\ j = 1,2,...,n, \tag{2.27}$$

или в матричных обозначениях:

$$X^* = X^* \cdot H + Z^*, \tag{2.28}$$

где $X^* = (X_1^*, X_2^*, ..., X_n^*)$ есть вектор-строка валового выпуска отраслей в перспективных ценах, а $Z^* = (Z_1^*, Z_2^*, ..., Z_n^*)$ — вектор-строка условно-чистого дохода в этих ценах.

Решением системы (2.28) в матричном виде является:

$$X^* = Z^* \bullet (E\text{-}H)^{-1}. \tag{2.29}$$

где E – единичная матрица, а матрица $(E - H)^{-1}$ является обратной к матрице $(E - H)$. Рассчитав валовые выпуски отраслей в перспективных ценах, можно получить индексы динамики отраслевых цен в сравнении с базисным годом: $r_j = X_j^*/X_j$.

Существует другой метод расчета отраслевых индексов динамики цен, основанный на модели прямого счета. Так как выполняются равенства:

$$x_{ij} = r_i \cdot x_{ij}; X_j^* = r_j \cdot X_j,$$

то систему уравнений (2.25) можно переписать в виде:

$$r_j \cdot X_j = \sum_{j=1}^{n} r_i x_{ij} + Z_j^*;\ j = 1,2,...,n,$$

а если учесть, что по определению коэффициента прямых материальных затрат

$$x_{ij} = X_j \cdot a_{ij},$$

то в виде:

$$r_j X_j = \sum_{i=1}^{n} r_i X_j a_{ij} + Z_j^*;\ j = 1,2,...,n. \qquad (2.30)$$

Разделив левые и правые части уравнений (2.30) на X_j получим

$$r_j = \sum_{i=1}^{n} r_i a_{ij} + \frac{Z_j^*}{X_j};\ j = 1,2,...,n. \qquad (2.31)$$

Обозначим через $r = (r_1, r_2, \ ...\ , r_n)$ вектор-строку индексов динамики отраслевых перспективных цен, через $G = (g_1, g_2, \ ...\ , g_n)$ — вектор-строку, компонентами которого являются величины $g_i = Z_j^* / X_j$. Тогда систему уравнений (2.31) можно написать в матричном виде:

$$r = r \cdot A + G, \qquad (2.32)$$

где A – матрица коэффициентов прямых материальных затрат. Решение матричного уравнения (2.31) есть:

$$r = G \cdot (E - A)^{-1} = G \cdot B, \qquad (2.33)$$

где $B = (E - A)^{-1}$ – матрица коэффициентов полных материальных затрат.

Рассмотрим конкретный **пример 2**. Пусть исходные данные те же, что и в предыдущем примере 1. Планируется перейти на новые отраслевые цены таким образом, чтобы условно-чистый доход в отраслях в этих ценах составил $Z_1^* = 179{,}0$; $Z_2^* = 189{,}0$; $Z_3^* = 300{,}0$. Используя модель прямого счета, определить индексы динамики отраслевых цен в сравнении с базисным годом, обеспечивающие достижение запланированных уровней условно-чистого дохода во всех отраслях.

1. Находим матрицу коэффициентов полных материальных затрат $B=(E-A)^{-1}$. В данном случае с учетом результатов расчета в примере 1 она равна:

$$B = \begin{pmatrix} 2{,}041 & 0{,}612 & 1{,}020 \\ 0{,}816 & 2{,}245 & 0{,}408 \\ 0{,}897 & 0{,}51 & 1{,}684 \end{pmatrix}.$$

2. Найдем величины валовой продукции трех отраслей в действующих отраслевых ценах. Воспользовавшись результатами счета в примере 1, определяем, что X_1=775,3; X_2=510,1; X_3= 729,6.

3. Находим составляющие вектора-строки G:

$$G_1 = \frac{179{,}0}{775{,}3} = 0{,}23; G_2 = \frac{189{,}0}{510{,}1} = 0{,}37; G_3 = \frac{300{,}0}{729{,}6} = 0{,}41.$$

4. В соответствии с формулой (2.34) искомые индексы динамики отраслевых цен в сравнении с базисным годом будут равны:

$$r = (0{,}23 \quad 0{,}37 \quad 0{,}41) \cdot \begin{pmatrix} 2{,}041 & 0{,}612 & 1{,}020 \\ 0{,}816 & 2{,}245 & 0{,}408 \\ 0{,}897 & 0{,}510 & 1{,}684 \end{pmatrix} = (1{,}13 \quad 1{,}18 \quad 1{,}08).$$

Таким образом, чтобы достичь запланированных уровней условно-чистого дохода, отраслевые цены в трех отраслях должны увеличиться соответственно на 13%, 18%, 8%.

Если сопоставить запланированные уровни условно-чистого дохода с соответствующими уровнями этой величины в действующих отраслевых ценах (см. в табл. 2.2 третий квадрант межотраслевого материального баланса в примере1), то можно определить, что при определенных выше индексах динамики отраслевых цен величина условно-чистого дохода (условно-чистой продукции) увеличится в трех отраслях на 15%, 23% и 3% соответственно. Это свидетельствует о тесной взаимоувязанности цен в межотраслевом (межпродуктовом) балансе.

Пример 3. Структура затрат последнего отчетного периода представлена в табл. 2.3. Как изменятся индексы цен в отраслях, если номинальная заработная плата в первой отрасли увеличится на 50% и будет оставаться неизменной в других отраслях? Учесть, что реальная динамика прочих элементов добавленной стоимости остается неизменной.

Таблица 2.3

Первый и третий квадранты трехотраслевого МОБ

Отрасли – производители	Отрасли – потребители		
	1	2	3
1	984,4	173,7	59,1
2	227,1	86,9	136,3
3	37,9	37,2	48,3
Заработная плата	377,1	351,9	75,4
Прибыль от реализации	563,5	469,3	173,9
Косвенные налоги	207,6	0	40
Дотации	-579,6	0	0

Потребление основного капитала	75	122	18
Валовая продукция	1893	1241	551

Решение. При решении этой задачи рассуждаем следующим образом. Источником инфляции является индекс роста заработной платы в первой отрасли (в 1,5 раза). Такое изменение одной из составляющих цены вызывает рост цен в отраслях, который характеризуется индексом p_i, i=1,3. В этих условиях система перепишется следующим образом:

$$\begin{cases} 984{,}4p_1 + 227{,}1p_2 + 37{,}9p_3 + 565{,}65 + p_1(563{,}5 + 207{,}6 - 579{,}6 + 75) = 1893p_1 \\ 173{,}7p_1 + 86{,}9p_2 + 37{,}2p_3 + 351{,}9 + p_2(469{,}3 + 122) = 1241p_2 \\ 59{,}1p_1 + 136{,}3p_2 + 48{,}3p_3 + 75{,}4 + p_3(173{,}9 + 40 + 18) = 537p_3 \end{cases}$$

После приведения подобных система имеет вид:

$$\begin{cases} 709{,}6p_1 - 227{,}1p_2 - 37{,}9p_3 = 565{,}65 \\ -173{,}7p_1 + p_2 - 37{,}2p_3 = 351{,}9 \\ -59{,}1p_1 - 136{,}2p_2 + p_3 = 75{,}4. \end{cases}$$

После решения системы получаем решение: p_1 = 1,2, p_2 = 1,07, p_3 = 1,14. Таким образом, рост заработной платы в первой отрасли в 1,5 вызывает следующие изменения цен: в первой отрасли в 1,2 раза, во второй – в 1,07 раза, в третьей – в 1,14 раза при условии, что рост всех других элементов добавленной стоимости совпадает с индексом роста цен.

Вопросы и задания для самопроверки

1. В чем суть балансового метода исследования социально-экономических систем?
2. Поясните принципиальную схему межотраслевого баланса.
3. Какие структурные элементы входят в экономико-математическую модель межотраслевого баланса?
4. Дайте определение коэффициентов прямых и полных материальных затрат и укажите способы их вычисления.
5. Укажите связь между коэффициентами прямых, косвенных и полных материальных затрат.
6. Поясните понятие «продуктивность матрицы коэффициентов прямых материальных затрат».
7. Приведите примеры использования балансовых моделей в задачах маркетинга.
8. Укажите методы расчета отраслевых индексов динамики цен на основе модели межотраслевого баланса.

9. В чём состоит ограниченность балансовых моделей и балансового метода в целом?

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Вариант 1

Дана четырехотраслевая модель, матрица коэффициентов прямых затрат:

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}52 & 0{,}12 & 0{,}04 & 0{,}2 \\ 0{,}07 & 0{,}35 & 0{,}03 & 0{,}12 \\ 0{,}04 & 0{,}03 & 0{,}3 & 0{,}14 \\ 0{,}05 & 0{,}03 & 0{,}04 & 0{,}2 \end{bmatrix}$$

Конечный платежеспособный спрос на продукцию отрасли в сопоставимых ценах составляет соответственно:

y_1= 40,3 млрд грн, y_2= 21,0 млрд грн, y_3= 1,3 млрд грн, y_4= 2,5 млрд грн.

Как изменятся индексы цен в отраслях, если условночистый доход в I отрасли будет увеличен на 50%?

Вариант 2

Дан вектор конечной продукции для трехотраслевой модели Y=(100 100 110) и материальные затраты потребляющих отраслей.

	I	II	III
I	10	16	50
II	3	15	40
III	2	26	30

Как изменятся индексы цен в отраслях, если условночистый доход во II отрасли будет увеличен на 15%?

Вариант 3

Дана четырехотраслевая модель, матрица коэффициентов прямых затрат:

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}52 & 0{,}04 & 0{,}12 & 0{,}2 \\ 0{,}07 & 0{,}03 & 0{,}35 & 0{,}12 \\ 0{,}04 & 0{,}3 & 0{,}03 & 0{,}14 \\ 0{,}05 & 0{,}04 & 0{,}03 & 0{,}2 \end{bmatrix}$$

Конечный платежеспособный спрос на продукцию отрасли в сопоставимых ценах составляет соответственно:

y_1= 40,3 млрд грн, y_2= 21,0 млрд грн, y_3= 1,3 млрд грн, y_4= 2,5 млрд грн.

Как изменятся индексы цен в отраслях, если условночистый доход в IV отрасли будет увеличен на 5%?

Вариант 4

Дан вектор конечной продукции для трехотраслевой модели *Y*=(100 120 110) и материальные затраты потребляющих отраслей.

	I	II	III
I	5	16	40
II	5	15	40
III	10	28	30

Как изменятся индексы цен в отраслях, если условночистый доход в III отрасли уменьшится на 10%?

Вариант 5

Дан вектор конечной продукции для трехотраслевой модели *Y*=(130 100 120) и материальные затраты потребляющих отраслей.

	I	II	III
I	30	10	56
II	6	12	46
III	5	21	27

Как изменятся индексы цен в отраслях, если условно чистый доход в I отрасли уменьшится на 5%?

Вариант 6

Дан вектор конечной продукции для трехотраслевой модели *Y*=(125 100 110) и материальные затраты потребляющих отраслей.

	I	II	III
I	10	18	51
II	8	10	40
III	7	26	30

Как изменятся индексы цен в отраслях, если условночистый доход во II отрасли уменьшится на 12%?

Вариант 7

Дан вектор конечной продукции для трехотраслевой модели Y=(100 140 110) и материальные затраты потребляющих отраслей.

	I	II	III
I	7	16	50
II	3	10	45
III	2	26	30

Как изменятся индексы цен в отраслях, если условночистый доход увеличится на 12% во II и увеличится на 5% в III отраслях?

Вариант 8

Дана четырехотраслевая модель, матрица коэффициентов прямых затрат:

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}52 & 0{,}04 & 0{,}12 & 0{,}2 \\ 0{,}07 & 0{,}03 & 0{,}35 & 0{,}12 \\ 0{,}04 & 0{,}3 & 0{,}03 & 0{,}14 \\ 0{,}05 & 0{,}04 & 0{,}03 & 0{,}2 \end{bmatrix}$$

Конечный платежеспособный спрос на продукцию отрасли в сопоставимых ценах составляет соответственно:

y_1= 40,3 млрд грн, y_2= 21,0 млрд грн, y_3= 1,3 млрд грн, y_4= 2,5 млрд грн.

Как изменятся индексы цен в отраслях, если условночистый доход увеличится на 10% в I и уменьшится на 5% в IV отраслях?

Вариант 9

Дан вектор конечной продукции для трехотраслевой модели Y=(110 120 110) и материальные затраты потребляющих отраслей.

	I	II	III
I	15	26	25
II	10	15	40
III	2	26	30

Как изменятся индексы цен в отраслях, если условночистый доход в III отрасли увеличится на 20%?

Вариант 10

Дан вектор конечной продукции для трехотраслевой модели Y=(130 120 110) и материальные затраты потребляющих отраслей.

	I	II	III
I	10	16	50
II	8	10	60
III	2	26	30

Как изменятся индексы цен в отраслях, если условночистый доход уменьшится на 10% во II и уменьшится на 5% в III отраслях?

3. ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ МОДЕЛИ В МАРКЕТИНГЕ

Широкий класс задач маркетинга сводится в процессе экономико-математического моделирования к оптимизационным моделям.

Оптимизационными задачами в экономике называются экономико-математические задачи, цель которых состоит в нахождении наилучшего (оптимального), с точки зрения некоторого критерия (критериев), варианта использования наличных ресурсов (материальных, временных и т. д.). Решаются такие задачи с помощью оптимизационных моделей методами математического программирования.

В отличие от дескриптивных, т. е. описательных, моделей, примером которых могут служить балансовые модели, оптимизационные модели наряду с уравнениями или неравенствами, описывающими взаимосвязи между переменными, содержат также критерий для выбора, называемый функционалом, или целевой функцией. Таким образом, общая структура этих моделей состоит из целевой функции, принимающей значения в пределах ограниченной условиями задачи области (области допустимых решений), и из ограничений, характеризующих эти условия. Целевая функция в самом общем виде определяется тремя моментами: управляемыми переменными, неуправляемыми параметрами (зависящими, например, от внешней среды) и видом (формой) зависимости между ними (видом функции). Если обозначить критерий оптимальности через U, управляемые переменные – $X= f(X_i)$, параметры – $P = (p_i)$, заданные пределы (область) изменения управляемых переменных – М, то общий вид оптимизационной модели будет следующим:

$$U = f(\bar{X}, \bar{P}) \to \underset{X \in M}{ext} \ (\max \textit{ или } \min) \cdot \tag{3.1}$$

Задачи вида (3.1) решаются методами математического программирования, которое включает в себя линейное программирование, нелинейное программирование, динамическое программирование, целочисленное программирование и т. д. Выбор методов математического программирования для решения оптимизационных задач определяется видом целевой функции f, видом ограничений, определяющих область M, и специальными ограничениями на управляемые переменные (например, требованием их целочисленности). Решение задачи (3.1) обычно называется оптимальным решением или оптимальным планом.

Рассмотрим прежде всего оптимизационные задачи, сводящиеся к задачам линейного программирования (ЗЛП). В общем виде эта задача может быть сформулирована, например, следующим образом. Найти вектор $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, максимизирующий линейную целевую функцию:

$$f\left(\overline{X}\right)=\sum_{j=1}^{n} c_j * x_j \rightarrow \max$$

и удовлетворяющий линейным функциональным ограничениям:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \le b_i; \quad i=\overline{1,m} \tag{3.2}$$

и прямым ограничениям:

$$x_j \le 0, \quad j=\overline{1,n}.$$

Задача (3.2) может быть записана в канонической форме, при которой функциональные ограничения имеют вид равенств. Это достигается путем прибавления к левым частям этих ограничений *m* дополнительных неотрицательных переменных. ЗЛП в канонической форме решается симплексным методом, в то же время для некоторых ЗЛП специального вида разработаны соответствующие специальные методы (алгоритмы) решения. Некоторые из этих методов не связаны непосредственно с алгоритмом симплексного метода, как, например, метод потенциалов для решения транспортной задачи; другие методы в качестве составных элементов используют вычислительные процедуры симплексного метода. Ниже приведены типовые задачи линейного оптимизационного программирования.

Планирование товарооборота

Коммерческое предприятие реализует товары нескольких групп: A_j ($j=\overline{1,n}$). Для реализации этих товаров используются ресурсы с ограниченным объемом: b_1 – рабочее время (чел⋅·ч); b_2 – площадь залов (м^2); b_3 – издержки обращения (грн). Известны нормы расхода каждого вида ресурса на реализацию единицы *j*-й группы товара – a_{ij}, ($i=\overline{1,3}$; $j=\overline{1,n}$). Доход в расчете на единицу товара составляет C_j.

Необходимо составить оптимальный план товарооборота по критерию максимума дохода *F* (или по другому критерию – минимум издержек обращения).

Построение экономико-математической модели задачи. Известно, что величина дохода линейно связана с объемом продажи товаров x_j. В связи с этим целевую функцию можно записать в виде:

$$F(X)=c_j x_1 + c_j x_2 + \ldots + c_n x_n \rightarrow \max$$

Очевидно, что объем продажи товаров не может быть отрицательной величиной. Поэтому $x_j > 0$, j = $\overline{1,n}$.

Учитывая нормы затрат ресурсов и их объемы, запишем ограничения математической модели:

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j} x_j \le b_1, \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{2j} x_j \le b_2, \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{3j} x_j \le b_3, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,n} \end{cases}$$

Решение задачи можно получить с помощью симплексного метода.

Производственная задача

Предприятие изготавливает несколько видов продукции, расходуя на это изготовление различные виды сырья. Запасы сырья ограничены. Доход, получаемый от реализации каждого вида продукции, различен. Необходимо составить такой план выпуска продукции, при котором доход предприятия был бы максимальным.

Для изготовления n видов продукции P_J $(1 < j < n)$ используется m видов сырья S_i ($1 < i < m$).

Запасы сырья составляют b_i ($i = \overline{1,m}$). Нормативный объем сырья, затрачиваемого на изготовление единицы продукции, составляет a_{ij}. Доход, получаемый от реализации единицы продукции, составляет D_j, ($j = \overline{1,n}$).

Необходимо составить такой план выпуска продукции, при котором доход от ее реализации будет максимальным.

Построение экономико-математической модели задачи. Обозначим x_j количество единиц продукции j-го вида ($j = \overline{1,n}$), запланированных к производству. Тогда целевая функция будет иметь вид:

$$F(\overline{X}) = \sum_{j=1}^{n} D_j * x_j \to \max.$$

Для изготовления всей продукции потребуется $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} * x_j$ единиц сырья i-го вида. Поскольку его количество ограничено величиной b_i, получаем неравенство:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} * x_j \le b_i, i = \overline{1,m}\,.$$

Подставляя нормативные и ограничивающие значения, запишем систему неравенств:

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j} * x_j \le b_1, \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{2j} * x_j \le b_2, \\ \dots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{nj} * x_j \le b_n, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,n}. \end{cases}$$

Решение модели можно получить, например, с помощью симплекс-метода.

Формирование рациональных смесей

В коммерческой деятельности возникают задачи, связанные с осуществлением рациональных закупок продуктов, обеспечивающих необходимый рацион питания для поддержания нормальной жизнедеятельности человека, или формирование диетического питания в больницах, или задачи составления кормовых смесей на животноводческих фермах.

Задачи о рациональном питании решаются в условиях ограниченного ассортимента, товарных запасов, стоимости, суточных норм потребления питательных веществ и их содержания в продуктах.

В любом случае из всех возможных вариантов необходимо выбрать самый экономичный.

Построение экономико-математической модели задачи. Допустим, имеется набор продуктов: мясо, рыба, молоко, сахар, яйца, картофель, овощи, фрукты, хлеб, мука по цене соответственно $c_1, c_2, ..., c_j$ $..., c_n$, причем запасы этих продуктов ограничены: $a_1, a_2, ..., a_j, ..., a_n$.

Содержание питательных веществ – белков, жиров, углеводов, витаминов и минеральных солей в 1 кг каждого продукта известно и составляет соответственно: q_{ij} $(i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n})$, кроме того, известны нормы суточной потребности человека в каждом питательном веществе: $b_1, b_2, \dots, b_i, \dots, b_m$.

Необходимо определить количество закупаемых продуктов $x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n$, которое обеспечит потребность в питательных веществах каждого вида и будет иметь минимальную стоимость. Так как содержание питательных веществ в рационе должно быть не менее $b_1, b_2, \dots, b_m$, то получим систему линейных ограничений:

$$\begin{cases} q_{11}x_1 + q_{12}x_2 + \ldots + q_{1j}x_j + \ldots + q_{1n}x_n \ge b_1, \\ q_{21}x_1 + q_{22}x_2 + \ldots + q_{2j}x_j + \ldots + q_{2n}x_n \ge b_2, \\ \ldots \\ q_{i1}x_1 + q_{i2}x_2 + \ldots + q_{ij}x_j + \ldots + q_{in}x_n \ge b_i, \\ \ldots \\ q_{m1}x_1 + q_{m2}x_2 + \ldots + q_{mj}x_j + \ldots + q_{mn}x_n \ge b_n. \end{cases}$$

Для решения подобного рода задач существуют в линейном программировании специально разработанные методы, а задачи такого рода называются транспортными.

Кроме того, количество каждого продукта в рационе не может быть величиной отрицательной, а размер закупок ограничен запасами:

$$0 \le x_1 \le a_1,\ 0 \le x_2 \le a_2, \ldots, 0 \le x_j \le a_j, \ldots, 0 \le x_n \le a_n.$$

Общая стоимость рациона запишется в виде линейной целевой функции:

$$F(\overline{X}) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_ix_j + \ldots + c_nx_n \rightarrow \max.$$

Перевозка грузов

В современных условиях большие транспортные расходы связаны с простоями в ожидании обслуживания на погрузочно-разгрузочных работах, порожними пробегами, встречными и нерациональными перевозками, расходами на бензин, техническое обслуживание и заработную плату водителей. В связи с этим необходимо решать задачи оптимального планирования перевозок грузов в производственной деятельности из пунктов отправления (баз, станций, фабрик, совхозов, заводов) в пункты назначения (магазины, склады) методами, позволяющими оптимизировать план по какому-либо экономическому показателю, например, финансовых затрат или времени на перевозки грузов.

Для решения подобного рода задач в линейном программировании существуют специально разработанные методы, а задачи такого рода называются транспортными.

Построение экономико-математической модели задачи. Имеется m пунктов отправления (поставщиков) грузов:

$$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_i, \ldots, A_m,$$

на которых сосредоточены запасы какого-либо однородного груза в объемах соответственно: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_i, \ldots, a_m$.

Величины a, определяют максимально возможные размеры поставок груза с пунктов отправления. Суммарный запас груза у поставщиков составляет $\sum_{i}^{m} a_i$.

Кроме того, имеется n пунктов назначения: B_1, B_2, B_3, …, B_j …, B_n,

которые подали заявки на грузы в объемах соответственно: b_1, b_2,, b_3, ..., b_j, ..., b_n. Суммарная величина заявок составляет $\sum_{j}^{n} b_j$.

Стоимость перевозки одной единицы груза от поставщика A_j к потребителю B_i обозначим через c_{ij} (транспортный тариф). Общая стоимость перевозок составит матрицу транспортных издержек. В качестве критерия оптимальности выбираем суммарные издержки по перевозке грузов.

Тогда транспортная задача формулируется следующим образом: необходимо составить оптимальный план, т. е. найти такие значения объема перевозок грузов $\| x_{ij} \|$ от поставщиков A_j к потребителям B_j, чтобы вывести все грузы; удовлетворить заявки каждого потребителя; обеспечить минимальные транспортные расходы на перевозку груза.

Все исходные данные транспортной задачи можно записать в виде табл. 3.1, которая называется транспортной.

Таблица 3.1

Транспортная таблица

Пункты отправления	Пункты назначения						Запасы a_i
	B_1	B_2	…	B_j	…	B_n	
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1j} x_{1j}	…	c_{1n} x_{1n}	A_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2j} x_{2j}	…	c_{2n} x_{2n}	A_2
…	…	…	…	…	…	…	…
A_i	c_{i1} x_{i1}	c_{i2} x_{i2}	…	c_{ij} x_{ij}	…	c_{in} x_{in}	a_i
…	…	…	…	…	…	…	…
A_m	c_{m2} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mj} x_{mj}	…	c_{mn} x_{mn}	a_m
Заявки b_j	b_1	b_2	…	b_j	…	b_n	$\sum_{i=1}^{m} a_i$ / $\sum_{j=1}^{n} b_o$

Математическая постановка транспортной задачи заключается в определении плана перевозок – матрицы $X = (x_{ij})$ ($i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$), которая удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = \overline{1,m}; & (3.3) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = \overline{1,n}; & (3.4) \\ x_{ij} \geq 0, \ i = \overline{1,m}, \ j = \overline{1,n}. & (3.5) \end{cases}$$

и обеспечивает минимальное значение целевой функции:

$$F(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij} \to \min. \qquad (3.6)$$

Модель транспортной задачи, удовлетворяющая условию $\sum_{i}^{m} a_i = \sum_{j}^{n} b_j$, называется *закрытой*. Если же указанное условие не выполняется, то модель называется *открытой*.

В случае превышения запаса над заявками $\sum_{i}^{m} a_i \succ \sum_{j}^{n} b_j$ вводится фиктивный *(n+1)* пункт назначения с потребностью $b_{n+1} = \sum_{i}^{m} a_i - \sum_{j}^{n} b_j$, и соответствующие тарифы считаются равными нулю: $c_{i,n+1} = 0$, $i = \overline{1,m}$.

При $\sum_{i}^{m} a_i < \sum_{j}^{n} b_j$ вводится фиктивный *(m+1)* пункт отправления с запасом груза $a_{m+1} = \sum_{j}^{n} b_j - \sum_{i}^{m} a_i$, и соответствующие тарифы принимаются равными нулю: $c_{m+1,j} = 0$, $j = \overline{1,n}$.

В таком виде экономико-математическая постановка транспортной задачи считается законченной.

Транспортная задача может быть решена с помощью компьютерных технологий, поскольку математические методы, как правило, реализованы в виде специальных программ. Это позволяет исключить необходимость проведения длительных вычислений и свести решение задачи к ее записи на бланке машинной обработки.

Формирование торговой сети

В регионе расположены населенные пункты, численность жителей которых, а также расстояние и стоимость поездок между ними известны. Кроме того, задано множество типовых проектов предприятий общественного питания. Необходимо найти оптимальный план размещения предприятий общественного питания в регионе, обеспечивающий минимальные приведенные затраты на их строительство, эксплуатацию и на поездки населения между населенными пунктами.

Построение экономико-математической модели задачи. Введем обозначения показателей, которые относятся к содержанию задачи:

n – количество населенных пунктов;

j – номер населенного пункта; $j = \overline{1, n}$;

N_J, – численность населения j-го населенного пункта;

r_{ij} – расстояние между пунктами i и j;

i – индекс пункта размещения предприятия общественного питания ($i = \overline{1, m}$);

Q_j – количество типовых вариантов предприятий для j-го пункта;

q – номер типового предприятия общественного питания $q = \overline{1, Q}$;

B_j – спрос населения в j-м населенном пункте на продукцию общественного питания;

b – норма обеспеченности продукцией общественного питания одного человека;

$R_{\text{доп}}$ – максимально допустимый радиус передвижения населения;

x_{ij} – численность населения j-го пункта, обслуживаемого предприятием i-го пункта;

x_{iq} – типовой вариант q предприятия общественного питания i-го пункта;

c_{iq} – текущие затраты для x_{iq};

p_{iq} – единовременные затраты для x_{iq};

c_{ij} – затраты на поездку одного жителя из пункта i в пункт j;

$E_н$ – нормативный коэффициент эффективности капитальных вложений.

В качестве критерия оптимальности принимаем приведенные затраты C на строительство, эксплуатацию и поездки населения. Тогда формальная запись задачи представляет такой вид. Найти такие типовые варианты q предприятий общественного питания для i-го пункта x_{iq} и x_{ij}, численность населения j-го пункта, обслуживаемого предприятиями i-го пункта, которые обеспечивают минимум затрат в соответствии с целевой функцией вида

$$C = \sum \left(c_{iq} + E_н P_{iq}\right) x_{iq} + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left(c_{ij} \cdot x_{ij}\right) \to \min,$$

при следующих условиях-ограничениях:
предложение продукции общественного питания, *предоставляемое* населению района предприятиями общественного питания i-го пункта, должно соответствовать мощности предприятия:

$$\sum_{j=1}^{n}\left(b\cdot x_{ij}\right)\le x_{iq},\quad i=\overline{1,m}.$$

Потребность населения j-го пункта в продукции, обеспечиваемой предприятиями района, должна быть удовлетворена:

$$\sum_{i=1}^{m}\left(b\cdot x_{ij}\right)\le B_j,\quad j=\overline{1,n}.$$

Расстояние от j-го пункта расселения до i-го пункта размещения предприятия не должно превышать допустимого радиуса обслуживания $r_{ij} < R_{\text{доп}}$. Кроме того, существуют ограничения на переменные $x_{ij} > 0$.

Решение этой задачи проводят путем последовательного подбора типовых мощностей предприятий торговли или общественного питания x_{iq} в модели и определении величин затрат для каждого варианта.

Выбор портфеля ценных бумаг

Допустим, инвестирование денежных средств сопровождается получением ценных бумаг (активов): акций, облигаций, валюты, векселей. Если денежные средства вложены в несколько объектов, полученные от инвестирования ценные бумаги образуют портфель активов.

Доходность портфеля характеризуется средневзвешенной доходностью его составляющих, которая для портфеля из двух активов рассчитывается следующим образом:

$$Д = W_a \bullet Д_a + W_b \bullet Д_b,$$

где $Д$ – общая доходность портфеля;
W_a – удельный вес актива *A;*
$Д_a$ – доходность актива *A;*
W_b –удельный вес актива *B;*
$Д_b$ – доходность актива *B.*

Будущая стоимость ценных бумаг (в отличие от текущей) не определена, зависит от большого количества различных факторов. Количественная мера этой неопределенности называется риском. При этом методы линейного программирования можно использовать для контроля систематического риска при формировании портфеля активов.

Допустим, имеется множество активов A_i ($i = \overline{1, m}$), а ожидаемые доходы для них соответственно равны $Д_i$. Доли каждого из этих активов в портфеле соответственно равны W_i и являются переменными, которые могут корректироваться для достижения цели. Риск портфеля R определяется как средневзвешенная величина рисков активов r_i.

Цель процедуры оптимизации заключается в максимизации дохода по портфелю при ограничении максимального размера риска портфеля.

Построение экономико-математической модели задачи. Определим оптимальные пропорции (веса) каждого из активов, которые приведут к максимальному ожидаемому доходу при условии заданного максимального уровня риска. Эта задача может быть сформулирована следующим образом.

Ограничения:

первое ограничение связано с тем, что:

1) риск R портфеля не должен превышать $R_{доп}$;

2) в каждый актив обязательно должны быть проведены положительные инвестиции;

3) все средства должны быть полностью инвестированы.

Таким образом, ограничения имеют следующий вид:

$$\sum_{i=1}^{m} W_i \cdot r_i \le R_{доп},$$

где все активы могут иметь только неотрицательные веса $0 \le W_i \le 1$;

причем $\sum_{i=1}^{m} W_i$, поскольку средства должны быть полностью инвестированы.

Все ограничения линейны (т. е. нет величин во второй или более высоких степенях) и одновременно присутствуют ограничения в виде равенств и неравенств. Целевая функция имеет вид:

$$Д = \sum_{i=1}^{m} W_i \cdot Д_i \to \max.$$

Модели оптимального раскроя промышленных материалов

Сущность оптимального раскроя состоит в разработке таких технологически допустимых раскройных планов, при которых из стандартных единиц раскраиваемых ресурсов получается необходимый комплект заготовок требуемого размера, а критерий оптимальности заключается в сведении к минимуму либо общей величины отходов кроя, либо количества раскраиваемых единиц ресурсов.

Формулировка задачи оптимального раскроя зависит от формы раскраиваемого материала, который может быть длинномерным, листовым, рулонным и т. д. Сформулируем экономико-математическую модель задачи оптимального раскроя по одному измерению длинномерных материалов (прутков, труб, профильного проката и др.). Примем следующие обозначения:

L – длина исходного материала;

i – номер (индекс) вида требуемых заготовок, $i = 1, 2, ..., m;$

l_I – длина заготовки i-го вида;

A_I – требуемое число заготовок i-го вида (не менее);

j – номер варианта раскроя, $y = 1, 2,..., n$;

a_{ij} – количество заготовок 1-го вида при раскрое единицы исходного материала по j-му варианту;

c_j – длина отхода по j-$му$ варианту.

Пусть x_j – количество единиц исходного материала, раскраиваемых по j-му варианту. Целевая функция по критерию минимума отходов имеет вид:

$$F\left(\overline{X}\right) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min , \tag{3.7}$$

а по критерию минимума раскраиваемых единиц исходного материала –

$$f\left(\overline{X}\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j \to \min \tag{3.8}$$

при условиях:

$$\begin{gathered} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq A_i; \quad i = \overline{1, m}; \\ x_j \geq 0; \quad j = \overline{1, n}. \end{gathered} \tag{3.9}$$

Получилась задача линейного программирования, которую можно пополнить требованием целочисленности величины x_j.

Заметим, что во многих случаях решения задач с обеими указанными целевыми функциями совпадают.

Наиболее трудоемкий этап в процессе построения модели рассматриваемой задачи заключается в определении всех возможных вариантов раскроя. Исходные соотношения для составления вариантов раскроя следующие:

$$\sum_{i=1}^{m} l_i a_{ij} + c_j; \quad j=\overline{1,n}; \tag{3.10}$$

$$0 \le c_j < \min_{i=\overline{1,m}} \{l_i\}; \quad j=\overline{1,n}. \tag{3.11}$$

Условие (3.11) означает, что длина отхода для любого варианта раскроя должна быть меньше длины самой короткой заготовки; это условие является признаком полноценности варианта.

Рассмотрим **пример**. Снабженческо-сбытовая фирма получает от поставщиков прутки стального проката длиной 600 см. Согласно заявкам потребителей, требуются заготовки трех видов в следующих количествах: 150 тыс. шт. длиной 250 см, 140 тыс. шт. длиной 190 см и 48 тыс. шт. длиной 100 см. Сформулируем экономико-математическую модель задачи оптимального раскроя с минимумом отходов. Составим таблицу возможных вариантов раскроя, при этом в первом блоке имеют место варианты раскроя, дающие все три вида заготовок, во втором – дающие заготовки второго и третьего видов, а в третьем – дающие заготовки только третьего вида (табл. 3.2).

Т а б л и ц а 3.2

Возможные варианты раскроя

Блок	Номер варианта (j)	Количество заготовок (a_i)			Остаток (c_j)
		l_1 = 250 *см*	l_2 = 190 *см*	l_3 = 100 *см*	
I	1	2	-	1	-
	2	1	1	1	60
	3	1	-	3	50
II	4	-	3	-	30
	5	-	2	2	20
	6	-	1	4	10
III	7	-	-	6	-

Пусть $x_1, x_2, x_3, x_4, x_3, x_6, x_7$ – количество прутков, раскраиваемых по каждому варианту. Тогда целевая функция имеет вид:

$$f(\overline{X}) = 60x_2 + 50x_3 + 30x_4 + 20x_5 + 10x_6 \rightarrow \min, \tag{3.12}$$

а ограничения задаются в виде следующих условий:

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 150 \text{ тыс.};$$
$$x_2 + 3x_4 + 2x_5 + x_6 = 140 \text{ тыс.};$$
$$x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_5 + 4x_6 + 6x_7 = 48 \text{ тыс.};$$
$$x_j \ge 0; \quad j=\overline{1,7}.$$

Модель оптимизации загрузки производственных мощностей

В общем виде задачу оптимальной загрузки производственных мощностей можно сформулировать следующим образом.

Имеется m предприятий (например, филиалов фирмы), которые могут производить n видов продукции. Известны:

а) a_i – фонд рабочего времени (например, в сменах) каждого предприятия; $i = 1, 2,..., m;$

б) bj – величина потребности в продукции j-го вида; $j = 1, 2, ..., n;$

в) a_{ij} – мощность или количество продукции j-го вида, вырабатываемой (в смену) на i-ом предприятии;

г) c_{tj} – себестоимость производства единицы j-ой продукции на i-ом предприятии.

Требуется составить такой план распределения заказов на продукцию по всем предприятиям, при котором суммарные затраты по изготовлению продукции в заданной номенклатуре будут минимальными при полной загрузке производственных мощностей предприятий.

Пусть x_{ij} – планируемый объем выпуска j-ой продукции на i-ом предприятии; совокупность таких величин обозначим X. Тогда целевая функция рассматриваемой задачи имеет вид:

$$f(\overline{X}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij} \to \min \tag{3.13}$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{x_{ij}}{a_{ij}} = a_i; \quad i = \overline{1, m}; \tag{3.14}$$

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j; \quad j = \overline{1, n};\\ x_{ij} \geq 0.\end{gathered} \tag{3.15}$$

Если условие точного выполнения плана в данной номенклатуре заменить требованием «не меньше», то условия (3.15) превратятся в неравенства:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq b_j; \quad j = \overline{1, n}.$$

Очевидно, задачу (3.13) – (3.15) можно решить симплексным методом как задачу линейного программирования. Однако если привести определенными приемами коэффициент a к единице, то данная модель не будет отличаться от модели транспортной задачи, и ее можно будет решить, в частности, методом потенциалов.

Задача о коммивояжере

В задаче о коммивояжере требуется отыскать наилучший маршрут, с тем чтобы объехать все порученные коммивояжеру пункты и вернуться назад либо в кратчайший срок, либо с наименьшими затратами на проезд.

В общем виде эту задачу можно сформулировать следующим образом.

Имется n городов, занумерованных числами от 1 до n. Коммивояжер, выезжая из города 1, должен побывать в каждом городе ровно один раз и вернуться в исходный пункт. Известны расстояния c_{ij} $\left(i,\ j=\overline{1,n}; i\neq j\right)$ между городами. Требуется найти самый короткий маршрут.

Введем переменные:

$$x_{ij}=\begin{cases}1, \textit{если в маршрут входит переезд из города } i \textit{ в город } j;\\ 0, \textit{ в противном случае } (i\neq j,\ i,\ j=\overline{1,n}).\end{cases}$$

Требования однократного въезда и выезда из каждого города запишутся в виде:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1;\ j = \overline{1,n};$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1;\ i = \overline{1,n}. \qquad (3.16)$$

Однако эти ограничения полностью не описывают допустимые маршруты, так как не исключают возможности разрыва пути, т. е. появления нескольких не связанных между собой подмаршрутов для части городов. Поэтому вводят дополнительно n переменных U_i, принимающих только целые неотрицательные значения, и записывают еще $(n - l)^2 - (n - 1)$ ограничений:

$$U_i - U_j + nx_{ij} \leq n-1;\ \ i,\ j=\overline{2,n};\ \ i\neq j. \qquad (3.17)$$

Нетрудно показать, что ограничения (3.17) не исключают допустимый маршрут, но исключают возможность существования подмаршрутов.

Таким образом, задача коммивояжера состоит в минимизации:

$$f\left(\overline{X}\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min \qquad (3.18)$$

при условиях (3.16), (3.17), где переменные x_{ij}, U_i принимают только неотрицательные целые значения.

К задаче о коммивояжере сводятся задачи выбора маршрута при развозке грузов, например, при выборе оптимальных маршрутов автотранспорта при кольцевой доставке товаров в торговую сеть, а также ряд других задач маркетинга. В общем случае задача о коммивояжере решается методами динамического программирования; применяются также методы целочисленного программирования: метод отсекающих плоскостей, метод ветвей и границ и другие.

Задача о размещении складов

Задача о размещении складов является одной из оптимизационных задач исследования операций и решается обычно методами линейного программирования. Задача заключается в минимизации общей суммы транспортных и складских расходов при следующих ограничениях:

а) с каждого предприятия должна быть отгружена вся продукция;

б) не может быть превышена емкость ни единого склада;

в) должны быть удовлетворены заявки всех потребителей.

В процессе решения задачи находится оптимальная по минимуму затрат трехчленная комбинация: предприятие – склад – потребитель. При некоторых условиях задача о размещении складов может сводиться к обычной транспортной задаче линейного программирования.

Модели рационального распределения материальных ресурсов

Одной из основных функций маркетинга является производственная. В процессе реализации этой функции перед службами маркетинга стоит важная задача рационального распределения различных видов материальных ресурсов, при этом критериями оптимальности могут быть максимизация прибыли, минимизация производственных и других затрат, максимальный выпуск товаров, пользующихся повышенным спросом, и т. д.

В общем виде задача рационального распределения материальных ресурсов может быть сформулирована следующим образом:

а) имеется m видов исходных материальных ресурсов, объемы которых ограничены определенной величиной a_i; $i = 1,2, ..., m$;

б) из этих ресурсов необходимо изготовить n видов продукции, при этом минимальный объем выпуска продукции каждого вида b_j задан в производственном плане; $j = 1, 2, ..., n$;

в) заданы нормы расхода ресурса i-го вида на выпуск единицы j-ой продукции a_{ij}, которые принимаются постоянными, не зависящими от объема выпуска продукции;

г) известна прибыль, получаемая при реализации единицы j-го вида продукции, c_j (или себестоимость изготовления этой единицы s_j), эти величины также принимаются не зависящими от объемов выпуска.

Требуется составить такой план распределения исходных материальных ресурсов, чтобы сумма прибыли от реализации всей продукции была максимальной (или общая себестоимость изготовленной продукции была минимальной).

Сформулируем экономико-математическую модель данной задачи. Обозначим через x_{ij} количество продукции j-го вида, которое следует изготовить в целях удовлетворения выбранного критерия оптимальности. Требуется определить множество неотрицательных переменных x_j > 0, где = 1, 2,..., n, удовлетворяющих ограничениям по ресурсам:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le a_i; \quad i = \overline{1, m}; \qquad (3.19)$$

и ограничениям по плану производства:

$$x_j \ge b_j; \quad j = \overline{1, n}; \qquad (3.20)$$

при этом целевая функция имеет вид для прибыли:

$$f(\overline{X}) = \sum c_j x_j \to \max, \qquad (3.20а)$$

а для себестоимости –

$$f(\overline{X}) = \sum s_j x_j \to \min. \qquad (3.20б)$$

Подобного рода задачи на рациональное распределение материальных ресурсов решаются с помощью общих методов линейного программирования.

3.1 Анализ устойчивости двойственных оценок

Возможности, предоставляемые теорией линейного программирования и симплекс-методом, не ограничиваются лишь получением оптимальных значений управляемых переменных. Решение задач линейного программирования должно обеспечивать пользователя динамичной информацией. Как только условия, в соответствии с которыми была построена модель, изменяются, информация, ассоциированная со статическим оптимальным решением, обычно сразу же теряет актуальность. Анализ модели на чувствительность как раз и связан с исследованием возможных изменений полученного оптимального решения в результате изменений исходной модели.

Математический аппарат задач линейного программирования помимо алгоритмов их численного решения включает в себя выводы, вытекающие из принципа двойственности в линейном программировании, которые весьма эффективны при экономико-математическом анализе оптимальных решений. Задача, двойственная по отношению к задаче (3.20), может быть сформулирована следующим образом:

найти вектор $\overline{Y} = (y_1, y_2, ..., y_m)$, минимизирующий целевую функцию:

$$g(\overline{Y}) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min, \tag{3.21}$$

при ограничениях:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j;\ j = \overline{1, n} \\ &y_i \ge 0; i = \overline{1, m}. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Задачи (3.20) и (3.21) образуют пару двойственных (симметричных) задач линейного программирования. Переменные двойственной задачи называются объективно обусловленными оценками, или двойственными оценками. Основные выводы относительно двух взаимно двойственных ЗЛП содержатся в трех теоремах двойственности; дадим их формулировку.

Первая теорема двойственности. Для двух взаимно двойственных ЗЛП имеет место один из взаимоисключающих случаев:

1) если одна из задач двойственной пары имеет оптимальное решение, то другая задача также имеет оптимальное решение, при этом значения целевых функций обеих задач в точках оптимума численно равны;

2) если область допустимых решений одной из задач – непустое множество, а ее целевая функция не ограничена, то область допустимых решений другой задачи есть пустое множество;

3) области допустимых решений обеих задач - пустые множества.

Если $\overline{X}^*(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ – оптимальный план прямой задачи, а $\overline{Y}^*(y_1^*, y_2^*, ..., y_n^*)$ – система оптимальных оценок ресурсов, то $F(\overline{X}^*) = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i \cdot y_i^* = Z(\overline{Y}^*)$, то есть максимально возможный доход от продажи товаров (или производства продукции), который может быть получен при имеющихся запасах ресурсов, равен оценке этих ресурсов.

Вторая теорема двойственности. Пусть векторы $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ и $Y = (y_1, y_2, ..., y_m)$ – допустимые решения исходной и двойственной задач соответственно. Для того чтобы эти векторы были оптимальными решениями соответствующих задач, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие соотношения:

$$\begin{cases} y_i\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i\right) = 0; \quad i = \overline{1,m}; \\ x_j\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i - c_i\right) = 0; \quad j = \overline{1,n}. \end{cases} \tag{3.23}$$

Как следует из соотношений (3.23), вторая теорема двойственности связывает между собой переменные исходной задачи и функциональные ограничения двойственной, и наоборот.

Математически записанная системой уравнений (3.23), может быть интерпретирована следующим образом. Если в оптимальном плане некоторый i-тый ресурс использован не полностью, то соответствующая оценка i-го ресурса $y_i^* = 0$, то есть если $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j^* \prec b_i$.Таким образом, положительную двойственную оценку y_i^* имеют лишь те виды ресурсов, которые полностью используются в оптимальном плане, то есть $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j^* = b_i$.

Вторая часть уравнений системы (3.23) свидетельствует о том, что продаже в оптимальном плане подлежат только те виды товаров $x_j^* \succ 0$, для которых оценка затраченных на их реализацию ресурсов равна доходу от их продажи, то есть если $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot y_i^* = c_j$. Нецелесообразно продавать те виды товаров, для которых $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot y_i^* \succ c_j$. В этом случае в оптимальном плане объем реализации данного товара $x_j^* = 0$.

Третья теорема двойственности (теорема об оценках). Оптимальные значения переменных двойственной задачи представляют собой оценки влияния свободных членов системы ограничений исходной задачи на величину целевой функции исходной задачи:

$$\frac{\partial f\left(\overline{X}\right)}{\partial b_i} = y_i.$$

Данная теорема об оценках позволяет определить приращение целевой функции при малых изменениях свободных членов Δb_i системы ограничений:

$$\Delta F_i^* \approx \overline{Y^*} \times \Delta b_i = \sum_{i=1}^{m} y_i^* \times \Delta b_i, \tag{3.24}$$

где $\overline{Y^*}$ — оптимальное решение двойственной задачи;

$\overline{Y^*} = (y^*_1, y^*_2, \ldots, y^*_m)$.

Из соотношения (3.24) следует, что двойственные оценки ресурсов показывают, на сколько денежных единиц изменяется доход от реализации продукции при изменении запаса соответствующего ресурса на одну единицу. Таким образом, теория двойственности позволяет провести экономический анализ пары двойственных задач, в частности, определить дефицитность ресурсов, сырья, продукции. Большей условной оценке соответствует наиболее дефицитный ресурс. Для i-го недефицитного ресурса двойственная оценка $y^*_i=0$. С помощью двойственной оценки можно определить степень влияния ограничений на значение целевой функции.

Таким образом, если получено оптимальное решение задачи линейного программирования, то можно провести анализ устойчивости двойственных оценок относительно изменений b_i, т. е. проанализировать устойчивость оптимального плана относительно изменений свободных членов системы линейных уравнений, оценить степень влияния изменения b_i на значение целевой функции и определить наиболее целесообразный вариант изменений b_i.

Предельные значения (нижняя и верхняя границы) изменения каждого из ресурсов, для которых двойственные оценки остаются неизменными, определяются следующим образом:

$$\Delta b_i^- = \max_{d_{ji}>0}\left\{-\frac{x_j^*}{d_{ji}}\right\} \le \Delta b_i \le \min_{d_{ji}<0}\left\{-\frac{x_i^*}{d_{ji}}\right\} = \Delta b_i^+.$$

где Δb_i — величина изменения i-го ресурса;

Δb^+_i — величина увеличения i-го ресурса;

Δb^-_i — величина уменьшения i-го ресурса;

x^*_j — компоненты оптимального плана;

d_{ij} — коэффициенты столбцов свободных переменных в оптимальном плане (коэффициенты структурных сдвигов, элементы обратной матрицы к базису оптимального плана).

Если в план включается реализация невыгодного с точки зрения дохода товара, то объем возможной продажи в рамках устойчивости оптимального плана определяется следующим интервалом:

$$\max_{d_{jk}<0}\left\{\frac{x_j^*}{d_{jk}}\right\} \le x_k \le \min_{d_{jk}>0}\left\{\frac{x_j^*}{d_{jk}}\right\}.$$

Проведем анализ устойчивости двойственных оценок для задачи планирования товарооборота.

Пример. Коммерческое предприятие, располагающее материально-денежными ресурсами, реализует три группы товаров – А, В и С. Плановые нормативы затрат ресурсов на 1 тыс. грн товарооборота, доход от продажи товаров на 1 тыс. грн товарооборота, а также объем ресурсов заданы в табл. 3.3.

Определите плановый объем продажи и структуру товарооборота так, чтобы доход торгового предприятия был максимальный.

Таблица 3..3

Материально-денежные ресурсы предприятия

Виды материально-денежных ресурсов	Норма затрат материально-денежных ресурсов на 1 тыс. грн товарооборота			Объем ресурсов b,
	группа А	группа В	группа С	
Рабочее время продавцов, чел. ч	0,1	0,2	0,4	1100
Площадь торговых залов, м^2	0,05	0,02	0,02	120
Площадь складских помещений, м	3	1	2	8000
Доход, тыс. грн	3	5	4	max

Решение. Запишем математическую модель задачи. Определим вектор $X = (x_1, x_2, x_3)$, который удовлетворяет условиям:

$$\begin{cases} 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 + 0{,}4x_3 \le 1100, \\ 0{,}05x_1 + 0{,}02x_2 + 0{,}02x_3 \le 120, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \le 8000, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0 \end{cases}$$

и обеспечивает максимальное значение целевой функции:

$$F(\overline{X}) = 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 \rightarrow \max.$$

Для построения первого опорного плана систему неравенств приведем к системе уравнений путем введения дополнительных переменных x_4, x_5, x_6:

$$\begin{cases} 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 + 0{,}4x_3 + x_4 = 1100, \\ 0{,}05x_1 + 0{,}02x_2 + 0{,}02x_3 + x_5 = 120. \\ 3x_1 + x_{23} + 2x_3 + x_6 = 8000. \end{cases}$$

Матрица коэффициентов $A = (a_{ij})$ этой системы уравнений имеет следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}4 & 1 & 0 & 0 \\ 0{,}05 & 0{,}02 & 0{,}02 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Векторы A_4, A_5, A_6 — линейно независимы, так как определитель, составленный из компонент этих векторов, отличен от нуля. Следовательно, соответствующие этим векторам переменные x_4, x_5, x_6 являются базисными, и в этой задаче определяют объемы неиспользованных ресурсов.

Решим систему уравнений относительно базисных переменных:

$$\begin{cases} x_4 = 1100 - (0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 + 0{,}4x_3), \\ x_5 = 120 - (0{,}05x_1 + 0{,}02x_2 + 0{,}02x_3), \\ x_6 = 8000 - (3x_1 + x_2 + 3x_3). \end{cases}$$

Функцию цели запишем в виде уравнения:

$$F(\overline{X}) = 0 - (- 3x_1 - 5x_2 - 4x_3).$$

Полагая, что свободные переменные $x_1 = 0$, $x_г = О$, $x_3 = 0$, получим первый опорный план $X_1 = (О, О, О, 1100, 120, 8000)$, $F(X_1) = О$, в котором базисные переменные $x_4 = 1100$, $x_5 = 120$, $x_6 = 8000$. Следовательно, товары не продаются, доход равен нулю, а ресурсы не используются. Полученный первый опорный план запишем в симплексную табл. 3.4.

Т а б л и ц а 3.4

Симплексная таблица

План	Базисные переменные	Значения базисных переменных	Значения коэффициентов при базисных переменных						δ_i
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
I	x_4	1100	0,1	**0,2**	0,4	1	0	0	5500
	x_5	120	0,05	0,02	0,02	0	1	0	6000
	x_6	8000	3	1	2	0	0	1	8000
Индексная строка	$F(\overline{X}_1)$	0	-3	-5	-4	0	0	0	
II	x_2	5500	0,5	1	2	5	0	0	11000
	x_5	10	**0,04**	0	-0,02	-0,1	1	0	250
	x_6	2500	2,5	0	0	-5	0	1	1000
Индексная строка	$F(\overline{X}_2)$	27500	-0,5	0	6	25	0	0	
III	x_2	5375	0	1	2,25	6,25	-12,5	0	
	x_1	250	1	0	-0,5	-2,5	25	0	
	x_6	1875	0	0	1,25	1,25	-62,5	1	
Индексная строка	$F(\overline{X}_3)$	27625	0	0	5,75	23,75	12,5	0	

Первый опорный план неоптимальный, так как в индексной строке находятся отрицательные коэффициенты: - 3, - 5, - 4.

За ведущий столбец выберем столбец, соответствующий переменной x_2, так как, сравнивая по модулю, имеем: |-5|>{|-3|, |-4|}.

Вычислим значения δ_i по строкам как частное от деления $\frac{b_i}{a_{i2}}$ и выбираем наименьшее:

$$\min \delta_i = \min\left(\frac{b_i}{a_{i2}}\right) = \min\left[\frac{1100}{0,2};\frac{120}{0,02};\frac{8000}{1}\right] = 5500.$$

Следовательно, первая строка является ведущей.

Разрешающий элемент равен 0,2 и находится на пересечении ведущего столбца и ведущей строки и выделен в таблице.

Формируем следующую часть симплексной таблицы. Вместо переменной x_4 в план II войдет переменная x_2. Строка, соответствующая переменной x_2 в плане II, получена в результате деления всех элементов строки x_4 плана I на разрешающий элемент РЭ = 0,2. На месте разрешающего элемента в плане II получаем 1. В остальных клетках столбца x_2 плана II записываем нули.

Таким образом, в новом плане II заполнены строки x_2 и столбец x_2. Все остальные элементы нового плана II, включая элементы индексной строки, определяются по правилу прямоугольника. Для этого выбираем из старого плана четыре числа, которые расположены в вершинах прямоугольника и всегда включают разрешающий элемент РЭ = 0,2. Во второй вершине по диагонали находится старое значение элемента, например, значение целевой функции $F(X_1) = 0 =$ СЭ, которое указывает на место расположения нового НЭ в новом плане II. Третий элемент А = 1100 и четвертый элемент В = - 5 завершают построение прямоугольника в недостающих двух вершинах и расположены по другой диагонали. Значение нового элемента в плане II находится из выражения:

$$НЭ = СЭ – (А*В)/РЭ = 0 – 1100*(-5)/0,2 = 27500.$$

Элементы строки, соответствующие переменной x_5, определяются аналогично:

$$120 - \frac{1100 \cdot 0{,}02}{0{,}2} = 10 \quad 0{,}05 - \frac{0{,}1 \cdot 0{,}02}{0{,}2} = 0{,}04,$$

$$0{,}02 - \frac{0{,}4 \cdot 0{,}02}{0{,}2} = -0{,}02 \quad 0 - \frac{0{,}02 \cdot 1}{0{,}2} = -0{,}1.$$

Все элементы, расположенные на пересечении строк и столбцов, соответствующих одноименным базисным элементам, равны 1, остальные элементы столбца в базисах векторов, включая индексную строку, равны 0. Аналогично проводятся расчеты по всем строкам таблицы, включая индексную.

Выполняя последовательно все этапы алгоритма, формулируем план II.

На третьей итерации табл. 3.4 получаем план III, который является оптимальным, так как все коэффициенты в индексной строке >0.

Оптимальный план можно записать так:

$$\overline{X^*} = (250, 5375, 0, 0, 0, 1875), \quad F(\overline{X^*}) = 27625 \text{ тыс. грн.}$$

Следовательно, необходимо продавать товаров первой группы А – 250ед., а второй группы В – 5375 ед. При этом торговое предприятие получает максимальный доход в размере 27 625 тыс. грн. Товары группы С не реализуются.

В оптимальном плане среди базисных переменных находится дополнительная переменная x_6. Это указывает на то, что ресурсы третьего вида (площадь складских помещений) недоиспользована на 1875 м^2, так как переменная x_6 была введена в третье ограничение задачи, характеризующее собой использование складских помещений этого ресурса.

В индексной строке оптимального плана в столбцах переменных x_3, x_4, x_5, не вошедших в состав базисных, получены ненулевые элементы, поэтому оптимальный план задачи линейного программирования является единственным.

Составим двойственную задачу к прямой задаче планирования товарооборота.

Прямая задача	Двойственная задача
$\overline{X}=(x_1,x_2,x_3)$ $\begin{cases}0{,}1x_1+0{,}2x_2+0{,}4x_2\le 1100\\ 0{,}05x_1+0{,}02x_2+0{,}02x_3\le 120\\ 3x_1+x_2+2x_3\le 8000\\ x_1\ge 0;x_2\ge 0;x_3\ge 0\end{cases}$ $F(X) = 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 \to \max$	$\overline{Y}=(y_1,y_2,y_3)$ $\begin{cases}0{,}1y_1+0{,}05y_2+3y_3\ge 3\\ 0{,}2y_1+0{,}02y_2+y_3\ge 5\\ 0{,}4y_1+0{,}02y_2+2y_3\ge 4\\ y_1\ge 0;y_2\ge 0;y_3\ge 0\end{cases}$ $Z(\overline{Y})=1100y_1+120y_2+8000y_3\to\min$

Задачи образуют симметрическую пару двойственных задач. Решение прямой задачи дает оптимальный план товарооборота по реализации трех групп товаров, а решение двойственной – оптимальную систему оценок ресурсов, используемых в процессе реализации.

Решение прямой задачи получено симплексным методом. Оптимальный план товарооборота:

$$\overline{X^*}=(250,5375,0,0,0,1875),\quad F(\overline{X^*})=27625 \text{ тыс. грн.}$$

Используя последнюю итерацию прямой задачи (план III симплексной табл. 3.4), найдем оптимальный план двойственной задачи.

Из I теоремы двойственности следует, что $\overline{Y^*}=C_\delta A^{-1}$, где C_δ – матрица коэффициентов базисных переменных , вошедших в оптимальный план.

Составим матрицу А из компонентов векторов, входящих в оптимальный базис:

$$A=\left(\overline{A_2},\overline{A_1},\overline{A_6}\right)=\begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}1 & 0\\ 0{,}02 & 0{,}05 & 0\\ 1 & 3 & 1\end{pmatrix}.$$

Определив обратную матрицу A^{-1} известными методами, получим:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 6,25 & -12,5 & 0 \\ -2,5 & 25 & 0 \\ 1,25 & -62,5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Как видно из плана III симплексной табл. 3.4, обратная матрица A^{-1} расположена в столбцах дополнительных переменных x_4, x_5, x_6.

Тогда:

$$\overline{Y^*} = C_\delta A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6.25 & -12.5 & 0 \\ -2.5 & 25 & 0 \\ 1.25 & -62.5 & 1 \end{pmatrix} = (23,75; 12,5; 0).$$

Оптимальный план двойственной задачи равен:

$$\overline{Y^*} = (23,75; 12,5; 0; 0; 0; 5,75), \quad Z(\overline{Y^*}) = 27625.$$

Подставим оптимальный план прямой задачи в систему ограниченной математической модели планирования товарооборота:

$$\begin{cases} 0.1*250 + 0.2*5375 + 0.4*0 = 1100; \\ 0.005*250 + 0.02*5375 + 0.02*0 = 120; \\ 3*250 + 1*5375 + 2*0 < 8000. \end{cases}$$

Первое и второе ограничения прямой задачи выполняются как равенства. Это означает, что ресурсы первого и второго видов полностью используются в оптимальном плане, являются дефицитными, и их оценки согласно второй теории двойственности отличны от нуля (y^*_1>0, y^*_2>0). Третье ограничение выполняется как строгое неравенство, т. е. ресурс третьего вида израсходован неполностью, остаток его в оптимальном плане x_6* = 1875. Значит, ресурс третьего вида не является дефицитным и цены в оптимальном плане не имеет y_3* = 0.

Таким образом, положительную двойственную оценку имеют лишь те виды ресурсов, которые полностью используются в оптимальном плане. Поэтому двойственные оценки определяют дефицитность ресурсов.

При подстановке оптимальных двойственных оценок в систему ограничений двойственной задачи получим:

$$\begin{cases} 0.1*23.75+0.05*12.5+3*0; \\ 0.2*23.75+0.02*12.5+1*0; \\ 0.4*23.75+0.02*12.5+2*0>4 \end{cases}$$

Первое и второе ограничения двойственной задачи выполняются как равенства. Это означает, что двойственные оценки ресурсов, используемых для реализации единицы товаров первой и второй групп, равны в точности доходам. Поэтому продавать эти виды товаров экономически целесообразно, а их реализация предусмотрена оптимальным планом прямой задачи ($x^*_1 > 0$, $x^*_2 > 0$). Третье ограничение двойственной задачи выполняется как строгое неравенство. Это означает, что двойственная оценка, используемая при реализации единицы товара третьей группы, выше дохода от его продажи. Следовательно, продавать товары третьей группы невыгодно, и в оптимальном плане прямой задачи $x^*_3 = 0$.

Величина двойственной оценки показывает, насколько возрастает значение целевой функции при увеличении дефицитного ресурса на единицу. Например, увеличение рабочего времени на 1 чел.-ч приведет к получению нового оптимального плана, в котором прибыль возрастает на 23,75 и станет равной:

$$F\left(\overline{X^*}\right) = 27625 + y_i^* = 27625 + 23{,}75 = 27648{,}75 \text{ тыс. грн.}$$

При этом коэффициенты оптимальной симплексной табл. 3.4 столбца x_4, коэффициенты структурных сдвигов k_c показывают, что указанное увеличение прибыли достигается за счет увеличения реализации второй группы товара на величину 6,25 единицы, уменьшения объема продажи первой группы товара на величину 2,5 единицы и уменьшения остатка ресурса третьего вида на 62,5 м^2.

В то же время ввод в продажу невыгодной группы товаров уменьшает размер дохода. Если $x_3* = 1$, то

$$F\left(\overline{X^*}\right) = 27625 - 5{,}75 = 27619{,}25 \text{ тыс. грн.}$$

При этом коэффициенты структурных сдвигов оптимальной симплексной табл. 3.4 столбца x_3 показывают, что указанное уменьшение дохода происходит за счет уменьшения объема продажи выгодного товара второй группы на величину 2,25 единицы, увеличения продажи первой группы товара на 0,5 единицы и уменьшения остатка ресурсов третьего вида на 1,25 м^2.

Таким образом, двойственные оценки связаны с оптимальным планом прямой задачи. Всякое изменение исходных данных прямой задачи оказывает влияние на ее оптимальный план и на систему двойственных оценок. В свою очередь двойственные оценки служат инструментом анализа и принятия правильных решений в условиях меняющихся коммерческих ситуаций.

Первый вид ресурса – время работы продавцов – может изменяться в пределах:

$$\max_{d_{jk}>0}\left\{-\frac{5375}{6{,}25};-\frac{1875}{1{,}25}\right\} \le \Delta b_1 \le \min_{d_{ik}<0}\left\{-\frac{250}{-2{,}5}\right\}.$$

$$-860 \le \Delta b_1 \le 100.$$

Таким образом, первый вид ресурса может быть уменьшен на 860 чел.-ч и увеличен на 100 чел.-ч. Интервал изменения равен: $[b_1 + \Delta b^{-}{}_1;\ b_1 + \Delta b^{+}{}_i]$ = [1100 - 860; 1100 + 100] = [240; 1200].

Второй ресурс (площадь торговых залов) может меняться в пределах:

$$\max_{d_{2k}>0}\left\{-\frac{250}{25}\right\} \le \Delta b_2 \le \min_{d_{2k}<0}\left\{-\frac{5375}{-12{,}5};-\frac{1875}{-62{,}5}\right\}.$$

$$-10 \le \Delta b_2 \le 30.$$

Интервал изменения второго ресурса равен: [120- 10; 120 + 30] = [110;150].

Третий вид ресурса – площади складских помещений – в оптимальном плане недоиспользован, является недефицитным. Увеличение данного ресурса приведет лишь к росту его остатка. При этом структурных изменений в оптимальном плане не будет, так как двойственная оценка $y_3^* = 0$.В оптимальный план не вошла основная переменная x_3, т. е. третья группа товара невыгодна к продаже. Определим максимально возможный объем продажи третьей группы товара в рамках устойчивости полученных двойственных оценок:

$$\max_{d_{3k}<0}\left\{\frac{250}{-0{,}5}\right\} \le x_3 \le \min_{d_{3k}>0}\left\{\frac{5375}{2{,}25};\frac{1875}{1{,}25}\right\}.$$

$$-500 \le x_3 \le 1500.$$

Таким образом, в продажу можно вводить третью группу товара в количестве до полутора тысяч единиц. Составим субоптимальные варианты плана с учетом изменений исходных данных модели.

1. Пусть торговое предприятие наняло дополнительных продавцов и рабочее время увеличилось на 50 чел.-ч.

Базисные переменные	Значения базисных переменных	Коэффициент структурных сдвигов (k_c) по b_1 (x_4)	Произведение k_c на $\Delta b_1 = 50$	Расчет плана варианта
x_2	5375	6,25	312,5	5687,5
x_1	250	-2,5	-125	125
x_6	1875	1,25	625	2500
$F(\overline{X_3})$	27625	23,75	1187,5	28812,5

В результате объем продаж второй группы товаров увеличился, а первой группы — уменьшился, недоиспользование складских помещений возросло, доход увеличился.

2. Пусть второй вид ресурса (площадь торговых залов) уменьшился на 5 м^2.

Базисные переменные	Значения базисных переменных	Коэффициент структурных сдвигов (k_c) по b_2(x_5)	Произведение k_c на $\Delta b_2 = -5$	Расчет плана варианта
x_2	5375	-12,5	62,5	5437,5
x_1	250	25	-125	125
x_6	1875	-62,5	312,5	2187,5
$F(\overline{X_3})$	27625	12,5	-62,5	27562,5

В результате уменьшения дефицитного ресурса сократился объем продажи первой группы товара, увеличился объем продажи второй группы товара, остаток третьего ресурса увеличился, доход от реализации товара сократился.

3. В продажу необходимо включить третью группу товара в количестве $x = 100$.

Базисные переменные	Значения базисных переменных	Коэффициент структурных сдвигов (k_c) по переменной x_3	Произведение k_c $x_3 = 100$	Расчет варианта плана
x_2 X_1 X_6	5375 250 1875	2,25 -0,5 1,25	225 -50 125	5150 300 1750
$F(\overline{X}_3)$	27625	5,75	575	27 050

Следовательно, включение в реализацию товара третьей группы $x_3 = 100$ приведет к уменьшению продажи второй группы товара, увеличению первой группы, сокращению остатка третьего вида ресурса. Доход от реализации товаров уменьшился, так как продажа данной группы невыгодна предприятию. Таким образом, анализ устойчивости двойственных оценок позволяет построить множество вариантов оптимальных решений с учетом изменений исходных условий модели. Если эти изменения выходят за рамки предельных значений, то нарушается полученная система двойственных оценок и возникает необходимость повторного решения задачи в новых условиях. В этом случае представляет интерес использование задач параметрического программирования.

Вопросы и задания для самопроверки

1. Поясните основные понятия оптимизационных моделей в экономике и математического аппарата их решения.
2. Сформулируйте основные выводы теории двойственности линейного программирования и приведите примеры их использования в задачах маркетинга.
3. Опишите статическую модель прикрепления потребителей к поставщикам (транспортная задача).
4. Дайте характеристику моделей оптимизации загрузки производственных мощностей, оптимального составления смесей, оптимального раскроя промышленных материалов, рационального распределения материальных ресурсов.
5. Приведите примеры использования методов нелинейного и динамического программирования в задачах маркетинга.
6. Поясните суть анализа устойчивости двойственных оценок.

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Контрольное задание состоит из 2-х частей. Первая часть предполагает теоретическую разработку экономико-математической модели в общем виде**,** а во второй части – помимо построения экономико-математической модели, необходимо её решить и произвести анализ устойчивости полученного оптимального решения.

I. Часть

Вариант 1

Постройте экономико-математическую модель оптимизации плана хозяйственной деятельности предприятия розничной торговли: определите объем продажи товаров *Xj* по каждой товарной группе, обеспечивающий максимум дохода Д при заданной величине товарооборота Q_n с учетом следующих данных:

n – количество товарных групп;

j – номер товарной группы, $j = 1, n$;

p – средняя розничная цена единицы товара j - й группы, грн;

Xj – объем товарооборота j-й товарной группы, грн;

$Q_{пл}$ – плановый объем товарооборота, грн;

$C\ j$ – уровень издержек обращения, % к товарообороту j-й товарной группы;

λ_j – уровень торговой скидки, % к товарообороту j-й товарной группы;

S – полезная площадь торговых залов, м^2;

Sj – полезная площадь отдела, в котором продаются товары j-й товарной группы, м^2;

$q^2{}_{\mathrm{j}}$ – норматив товарооборота j-й товарной группы на 1 м^2 площади залов, грн/м^2;

b^l – рабочее время продавцов квалификации l, $l=1,L$

$q^l{}_{\mathrm{j}}$ – норматив товарооборота по j-й товарной группе на группу продавцов квалификации в единицу времени, грн/ч;

b^n – издержки обращения по статье h, грн;

q_i^n – плановый норматив издержек обращения_по статье h, грн;

h – номер статьи издержек обращения, $h = 1,H$ (($h = 1$) – заработная плата, ($h = 2$) – транспортные расходы и т. д.);

H – количество статей издержек обращения.

Вариант 2

Постройте экономико-математическую модель оптимизации плана хозяйственной деятельности предприятия розничной торговли, позволяющую определить товарооборот по каждой товарной группе X_j, обеспечивающий максимальный объем товарооборота Q при заданной величине дохода $D_{пл}$ и условиях :

n – количество товарных групп;

j – номер товарной группы, j =1, n;

p_j – средняя розничная цена единицы товара j - й группы, грн;

Xj – объем товарооборота j-й товарной группы, грн;

$Q_{пл}$ – плановый объем товарооборота, грн;

C_j – уровень издержек обращения, % к товарообороту j-й товарной группы;

λ – уровень торговой скидки, % к товарообороту j-й товарной группы;

S – полезная площадь торговых залов, м^2;

S_j – полезная площадь отдела, в котором продаются товары j-й товарной группы, м^2;

$q^2{}_j$ – норматив товарооборота j-й товарной группы на 1 м^2 площади залов, грн/м^2;

b^l – рабочее время продавцов квалификации l, $l=1,L$;

$q^l{}_j$ – норматив товарооборота по j-й товарной группе на группу продавцов квалификации в единицу времени, грн/ч;

b_i^n – издержки обращения по статье h, грн;

q_i^h – плановый норматив издержек обращения по статье h, грн;

h – номер статьи издержек обращения, $h = 1,H$ (($h = 1$) – заработная плата, ($h = 2$) – транспортные расходы и т. д.);

H – количество статей издержек обращения.

Вариант 3

Торговое предприятие в течение месяца осуществляет реализацию n товарных групп $j = 1, n$, каждая из которых включает r видов товара $\overline{1,R}$. На реализацию товаров r-го вида каждой товарной j-й группы заданы верхний $q^b{}_{jr}$ и нижний $q^n{}_{jr}$ пределы товарооборота. Предприятию установлен месячный план товарооборота $Q_{пл}$ тыс. грн.

Постройте экономико-математическую модель, позволяющую получить оптимальный месячный план продажи товаров $X = (x_{jr})$, обеспечивающий максимальный доход $Д$ при следующих условиях:

S_{ir} – площадь торговых залов на единицу товарооборота в натуральном выражении при реализации r вида товара из j-й группы;

S – производственная площадь торгового предприятия, м^2;

b^1 – месячный фонд времени работы продавцов квалификации l, $l=1,L$, чел./ч;

$q^l{}_{jr}$ – норматив товарооборота на группы продавцов квалификации l при реализации r-го вида товара из j-й группы в единицу времени;

$П_{ir}$ – торговая прибыль от продажи единицы r-го вида товара из j-й группы, грн;

P_{jr} – средняя розничная цена r-го вида товара из j-й группы, грн;

b^h – месячный лимит статьи h издержек обращения, $h = 1,H$, грн;

q^d_{jr} – расходы по статье издержек обращения на 1 тыс. грн. товарооборота по реализации r-го вида товара из j-й группы, грн/тыс. грн;

$Q_{пл}$ – плановый объем товарооборота.

Вариант 4

Торговое предприятие в течение месяца осуществляет продажу n товарных групп, каждая из которых включает r видов товара $r = 1, R$. На реализацию товара r-го вида каждой товарной j-и группы $j = \overline{1, n}$ заданы пределы товарооборота верхний $q^b{}_{jr}$ и нижний $q^n{}_{jr}$

Постройте экономико-математическую модель, позволяющую получить оптимальный месячный план продажи по каждому виду товара $X=(x_{jr})$, обеспечивающий при заданной величине торговой прибыли $D_{пл}$ максимальный объем товарооборота Q по условиям задачи варианта 3.

Вариант 5

Постройте экономико-математическую модель организации снабжения товарами предприятий розничной торговой сети в городе, обеспечивающую минимум затрат на транспортные расходы C по завозу товаров при следующих условиях:

R – количество наименований товарных позиций;

r – номер наименования товара, $r = 1,R$;

m – количество розничных торговых предприятий;

i – номер розничного торгового предприятия, $i = 1,m$;

n – количество оптовых торговых предприятий;

j – номер оптового торгового предприятия, $j= 1, n$;

$З_{jr}$ – запасы r-го товара на j-м оптовом предприятии;

M_{jr} – объем реализации товара r-го наименования на i-м розничном предприятии;

S_r – спрос населения на товар r-го вида;

C_{ijr} – стоимость перевозки единицы товара r-го вида из j-го оптового торгового предприятия в i-е розничное;

X_{ijr} – объем перевозок товаров r-го вида из j-го оптового в i-е розничное торговое предприятие.

Вариант 6

Постройте экономико-математическую модель организации снабжения товарами предприятий розничной торговли в городе, позволяющую получить максимальный доход по условиям задачи варианта 5.

Вариант 7

Постройте экономико-математическую модель развития предприятий розничной торговли сети в регионе, обеспечивающую минимум затрат на поездку жителей из населенных пунктов в торговые центры при следующих условиях:

n – число населенных пунктов;

j – номер населенного пункта, $j = 1, n$;

n_j – численность населения j-го пункта;

m – количество торговых центров;

i – номер торгового центра $i = \overline{1, m}$;

C_{ij} – затраты на поездку одного жителя из пункта j в пункт i торгового центра;

X_{ij} – численность населения j-го пункта, обслуживаемого в i-м центре;

R – количество наименований товарных позиций;

b_r – норма обеспеченности одного жителя товаром r-го вида, $r = \overline{1,r}$;

M_{ir} – объем реализации товара r в i-м торговом центре;

S_j – спрос всего населения n_j в пункте j на товары.

Вариант 8

Постройте экономико-математическую модель развития предприятий розничной торговли в регионе, обеспечивающую получение максимального дохода по условиям задачи варианта 7.

Вариант 9

Постройте экономико-математическую модель задачи размещения предприятий розничной торговли в регионе, имеющем n населенных пунктов, среди которых следует выбрать такие m, где будут расположены торговые центры, которые представляли бы населению соответствующие r товары в объеме b_r и ассортименте R, соответствующие нормам обеспеченности всего населения региона в целом S и при этом средневзвешенные затраты времени на поездку T были бы минимальны с учетом следующих данных:

R – количество наименований товарных позиций;

r – номер наименования товара, r = 1,R;

b_r – норма обеспеченности одного человека товарами r вида;

j – номер населенного пункта, j= 1, n;

N_j – численность населения в j-м пункте;

N_{min} – минимально допустимая численность населения, обслуживаемая торговым центром;

i – номер предприятия розничной торговли, $i = 1,m$;

S – объем спроса на товары всего населения региона;

t_{ij} – затраты времени на поездку из j-го пункта до i-го торгового центра;

T_{max} – максимально допустимые затраты времени на поездку до торгового центра;

X_{ij} =1, если i-ий пункт прикреплен к i-му центру, в противоположном случае он равен 0.

Вариант 10

Постройте экономико-математическую модель задачи размещения предприятий розничной торговли, позволяющую минимизировать транспортные издержки на доставку товаров по условиям задачи варианта 9.

II. Часть

Вариант 1

Постройте экономико-математическую модель определения структуры блюд на предприятии общественного питания, обеспечивающую максимальный доход на основе заданных нормативов затрат продуктов на первые и вторые блюда, представленных в следующей таблице:

Ресурсы	Плановый фонд ресурсов	Нормативы затрат ресурсов на 100 блюд				
		1-е	2-е мясные	2-е рыбные	2-е молочные	2-е прочие
Мясо, кг.	40000	4,0	8,0	-	-	3,8
Рыба, кг.	25000	2,5	-	10	-	-
Овощи, кг.	27000	3,2	2,0	3,0	-	4,6
Мука, крупа, кг	20000	2,1	2,6	2,3	-	2,8
Макаронные изделия, кг						
Молоко, л	50000	6,5	-	-	21	-
Доход, грн		1,3	2,0	1,5	0,3	1,7

Вариант 2

Предприниматель арендовал технологическую линию деревообрабатывающих станков для изготовления вагонки. Магазин «Стройматериалы» заказал комплекты из трех элементов: две вагонки длиной 2 м и одной вагонки длиной 1,25 м. Поставщик завозит на грузовом автомобиле доски толщиной 20 мм, шириной 100 мм и длиной по 6,5 м — 200 шт. и длиной по 4 м — 50 шт.

Рассчитайте, как распилить доски, чтобы продать максимальное количество комплектов?

Вариант 3

Составьте дешевый вариант 1 т кормовой смеси в соответствии с требованиями, представленными в следующей таблице:

Питательные вещества	Требования, % от веса	Содержание питательных веществ в кормах, %			
		люцерновая мука	сухая барда	рыбная мука	соевый шрот
Белок	Не менее 35	17	25	60	45
Жиры	Не менее 1,5	2	5	7	0,5
Клетчатка	Не более 8	25	3	1	6,5
Вес	1т	1	1	1	1
Стоимость, грн за 1 т	?	70	90	150	100

Вариант 4

По предписанию врача пациенту необходимо перейти на диету и за сезон употребить питательных веществ, содержащихся во фруктах, в количествах, указанных в таблице. Определите, какое количество фруктов каждого вида необходимо купить за сезон, чтобы выполнить предписание врача с минимальными расходами.

Вещества	Содержание питательных веществ в 1 кг фруктов			Нормы потребления, г.
	клубника	яблоки	смородина	
P_1	3	2	1	30
P_2	1	3	4	70
P_3	0	0	5	40
P_4	1	0	1	50
Цена, грн за 1 кг	1,0	0,5	0,8	

Вариант 5

Сформируйте вариант образования бензина АИ-80 и АИ-95, который обеспечивает максимальный доход от продажи, если имеется 5 т смеси 1-го сорта и 30 т смеси 2-го сорта. На изготовление бензина АИ-80 идет 60% смеси 1-го сорта и 40% смеси 2-го сорта, на изготовление бензина АИ-95 идет 80% смеси 1-го сорта и 20% смеси 2-го сорта. Реализуется 1 т бензина АИ-80 за 5000 грн, а 1 тАИ-95 - за 6000 грн.

Вариант 6

Постройте экономико-математическую модель определения структуры выпуска первых и вторых блюд на предприятии общественного питания при заданном квартальном плане товарооборота 270 000 грн и получении максимального дохода от реализации на основе данных, приведенных в следующей таблице:

Ресурсы	Плановый фонд ресурсов	Нормативы затрат ресурсов на 100 блюд				
		1-е	2-е мясные	2-е рыбные	2-е молочные	2-е прочие
Затраты труда на производство, чел.ч.	80000	3,6	6,0	37,0	2,5	22
Затраты труда на обслуживание, чел.ч.	140000	2,2	5,3	5,2	2,7	3,1
Издержки производства и обращения, грн	17000	4,4	6,7	6,8	25	4,2
Доход, грн		1,4	2,1	1,6	0,31	1,8
Товарооборот, грн	300000	30	38	24	23	22

Вариант 7

Фирма производит два безалкогольных широко популярных напитка – «Колокольчик» и «Буратино». Для производства 1 л «Колокольчика» требуется 0,02 ч работы оборудования, для «Буратино» - 0,04 ч, а расход специального ингредиента на них составляет 0,01 кг и 0,04 кг на 1 л соответственно. Ежедневно в распоряжении фирмы 16 кг специального ингредиента и 24 ч работы оборудования. Доход от продажи 1 л «Колокольчика» составляет 0,25 грн, а «Буратино» – 0,35 грн.

Определите ежедневный план производства напитков каждого вида, обеспечивающий максимальный доход от их продажи.

Вариант 8

Фирма производит для автомобилей запасные части типа А и В. Фонд рабочего времени составляет 5000 чел./ч в неделю. Для производства одной детали типа А требуется 1 чел./ч, а для производства одной детали типа В –

2 чел./ч. Производственная мощность позволяет выпускать максимум 2500 деталей типа А и 2000 деталей типа В в неделю. Для производства детали типа А уходит 2 кг полимерного материала и 5 кг листового материала, а для производства одной детали типа В – 4 кг полимерного материала и 3 кг листового металла. Еженедельные запасы каждого материала – по 10 000 кг. Общее число производимых деталей в течение одной недели должно составлять не менее 1500 штук.

Определите, сколько деталей каждого вида следует производить, чтобы обеспечить максимальный доход от продажи за неделю, если доход от продаж одной детали типа А и В составляет соответственно 1,1 грн и 1,5 грн.

Вариант 9

Брокеру биржи клиент поручил разместить 100 000 долл. США на фондовом рынке, сформировать портфель с ценными бумагами, чтобы получить максимальные годовые проценты с вложенного капитала. Выбор ограничен четырьмя возможными объектами инвестиций – акций А, В, С, Д, которые позволяют получить доход в размерах соответственно 6%, 8%, 10% и 9% годовых от вложенной суммы. При этом клиент поручил не менее половины инвестиций вложить в акции А и В. С целью обеспечения ликвидности не менее 25% общей суммы капитала нужно поместить в акции Д. Учитывая прогноз на изменение ситуации в будущем, в акции С можно вложить не более 20% капитала. Специфика налогообложения указывает на необходимость вложения в акции А не менее 30% капитала.

Определите распределение инвестиций капитала, обеспечивающего максимальный годовой процентный доход.

Вариант 10

Туристская фирма в летний сезон обслуживает в среднем 7500 туристов и располагает флотилией из двух типов судов, характеристики которых представлены в таблице.

	Судно	
	I	II
Пассажировместимость, чел.	2000	1000
Горючее, т	12000	7000
Экипаж, чел.	250	100

В месяц выделяется 60 000 т горючего. Потребность в рабочей силе не превышает 700 человек.

Определите количество судов I и II типа, чтобы обеспечить максимальный доход, который составляет от эксплуатации судов I типа 20 млн грн, а II типа – 10 млн грн в месяц.

Вариант 11

Фирма производит и продает столы и шкафы из древесины хвойных и лиственных пород. Расход каждого вида в кубометрах на каждое изделие задан в таблице.

	Расход древесины, $м^3$		Цена изделия, тыс. грн
	хвойные	лиственные	
Стол	0,15	0,2	0,8
Шкаф	0,3	0,1	1,5
Запасы древесины	80	40	

Определите оптимальное количество столов и шкафов, которое следует поставлять на продажу для получения максимального дохода фирмы.

Вариант 12

С Курского вокзала Москвы ежедневно отправляются скорые и пассажирские поезда. Пассажировместимость и количество вагонов железнодорожного депо станции отправления указаны в таблице.

Тип вагона		Багажный	Почтовый	Жесткий	Купейный	Мягкий
Количество вагонов в поезде	Скорый	1	1	8	4	1
	Пассажирский	1	0	5	6	3
Пассажировместительность, чел.				58	40	32
Парк вагонов		10	8	80	70	30

Определите оптимальное количество пассажирских и скорых поездов, обеспечивающих максимальное количество ежедневно отправляемых пассажиров с вокзала.

Вариант 13

Авиакомпания располагает парком в 70 самолетов восьми типов.

Тип самолета	Загрузка пассажирами		Время полета без посадки, ч	Парк самолетов, шт.
	минимальная	максимальная		
1. ТУ-134	68	76	7	25
2. ТУ-154	132	158	4	10
3. ИЛ-62	132	162	12	10
4. ИЛ-86	316	350	5	12
5. ИЛ-96	235	-	10	4
6. В-737	137	-	12	3

7. B-777	231	-	22	2
8. A-310	179	191	12	4

Парк самолетов используется для перевозки пассажиров на пяти авиалиниях, по каждой из них задан объем ежемесячных перевозок. Постройте оптимальный план перевозок пассажиров.

Рейс	Протяженность линий, ч (т)	Количество промежуточных посадок	Объем пассажирских перевозок, чел.
I. Египет - Хургада	5,5	0	4000
II. Испания - Малага	4,5	0	3500
III. Япония - Токио	11	2	35000
IV. Франция - Париж	3,5	1	7000
V. США - Нью-Йорк	9	2	6000

4. МЕТОДЫ И МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ТОВАРНЫМИ ЗАПАСАМИ

Задача управления запасами возникает, когда необходимо создать запас материальных ресурсов или предметов потребления с целью удовлетворения спроса на заданном интервале времени (конечном или бесконечном). Для обеспечения непрерывного и эффективного функционирования практически любой организации необходимо создание запасов. В любой задаче управления запасами требуется определять количество заказываемой продукции и сроки размещения заказов. Спрос можно удовлетворить путем однократного создания запаса на весь рассматриваемый период времени или посредством создания запаса для каждой единицы времени этого периода. Эти два случая соответствуют избыточному запасу (по отношению к единице времени) и недостаточному запасу (по отношению к полному периоду времени).

При избыточном запасе требуются более высокие удельные (отнесенные к единице времени) капитальные вложения, но дефицит возникает реже и частота размещения заказов меньше. С другой стороны, при недостаточном запасе удельные капитальные вложения снижаются, но частота размещения заказов и риск дефицита возрастают. Для любого из указанных крайних случаев характерны значительные экономические потери. Таким образом, решения относительно размера заказа и момента его размещения могут основываться на минимизации соответствующей функции общих затрат, включающих затраты, обусловленные потерями от избыточного запаса и дефицита.

4.1. Типы моделей управления запасами

Чем же объясняется столь большое разнообразие моделей этого класса и методов решения соответствующих задач, базирующихся на различном математическом аппарате: от простых схем дифференциального и интегрального исчисления до сложных алгоритмов динамического и других видов математического программирования? Ответ на этот вопрос определяется характером спроса, который может быть детерминированным (достоверно известным) или вероятностным (задаваемым плотностью вероятности). На рис. 4.1 приведена схема классификации спроса, обычно принимаемая в моделях управления запасами. Детерминированный спрос может быть статическим, в том смысле что интенсивность потребления остается неизменной во времени, или динамическим, когда спрос известен достоверно, но изменяется в зависимости от времени. Вероятностный спрос может быть стационарным, когда функция плотности вероятности спроса неизменна во времени, и нестационарным, когда функция плотности вероятности спроса изменяется во времени.

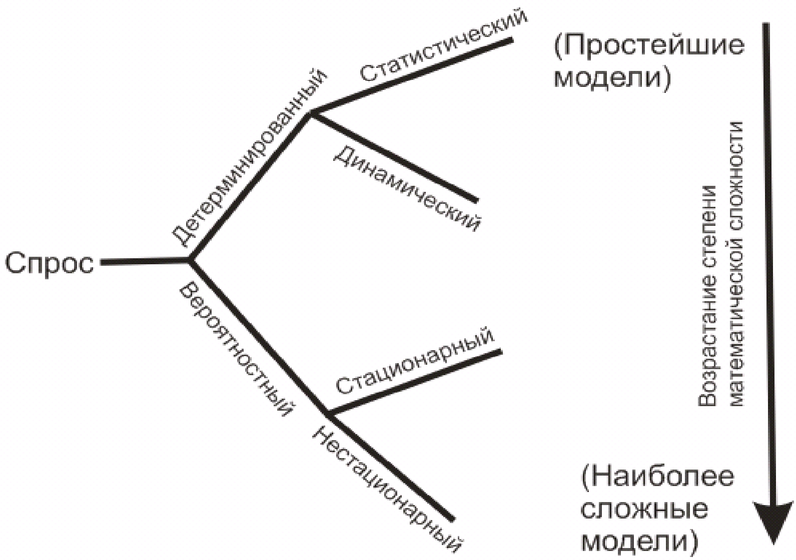

Рис. 4.1. Схема классификации спроса

В реальных условиях случай детерминированного статического спроса встречается редко. Такой случай можно рассматривать как простейший. Так, например, хотя спрос на такие продукты массового потребления, как хлеб, может меняться от одного дня к другому, эти изменения могут быть столь незначительными, что предположение статичности спроса несущественно искажает действительность.

Наиболее точно характер спроса может быть, возможно, описан посредством вероятностных нестационарных распределений. Однако с математической точки зрения модель значительно усложняется особенно при увеличении рассматриваемого периода времени. Рис. 4.1 иллюстрирует возрастание математической сложности модели управления запасами при переходе от детерминированного статического спроса к вероятностному нестационарному спросу. По существу, классификацию рис. 4.1 можно считать представлением различных уровней абстракции описания спроса.

На первом уровне предполагается, что распределение вероятностей спроса стационарно во времени. Это означает, что для описания спроса в течение всех исследуемых периодов времени используется одна и та же функция распределения вероятностей. При таком предположении влияние сезонных колебаний спроса в модели не учитывается.

На втором уровне абстракции учитываются изменения спроса от одного периода к другому. Однако при этом функции распределения не применяются, а потребности в каждом периоде описываются средней величиной спроса. Это упрощение означает, что элемент риска в управлении запасами не учитывается. Однако оно позволяет исследовать сезонные колебания спроса, которые вследствие аналитических и вычислительных трудностей нельзя учесть в вероятностной модели. Другими словами, здесь возникает определенный компромисс: можно использовать, с одной стороны, стационарные распределения вероятностей, а с другой — переменную, но известную функцию спроса при допущении «определенности».

На третьем уровне упрощения исключаются как элементы риска, так и изменения спроса. Тем самым спрос в течение любого периода предполагается равным среднему значению известного (по предположению) спроса по всем рассматриваемым периодам. В результате этого упрощения спрос можно оценить его постоянной интенсивностью.

Хотя характер спроса является одним из основных факторов при построении модели управления запасами, имеются другие факторы, влияющие на выбор типа модели. К их числу относятся:

1. *Запаздывания поставок или сроки выполнения заказов.* После размещения заказа он может быть поставлен немедленно или потребуется некоторое время на его выполнение. Интервал времени между моментом размещения заказа и его поставкой называется запаздыванием поставки, или сроком выполнения заказа. Эта величина может быть детерминированной или случайной.

2. *Пополнение запаса.* Хотя система управления запасами может функционировать при запаздывании поставок, процесс пополнения запаса может осуществляться мгновенно или равномерно во времени. Мгновенное пополнение запаса может происходить при условии, когда заказы поступают от внешнего источника. Равномерное пополнение может быть тогда, когда запасаемая продукция производится самой организацией. В общем случае система может функционировать при положительном запаздывании поставки и равномерном пополнении запаса.

3. *Период времени* определяет интервал, в течение которого осуществляется регулирование уровня запаса. В зависимости от отрезка времени, на котором можно надежно прогнозировать, рассматриваемый период принимается конечным или бесконечным.

4. *Число пунктов накопления запаса*. В систему управления запасами может входить несколько пунктов хранения запаса. В некоторых случаях эти пункты организованы таким образом, что один выступает в качестве поставщика для другого. Эта схема иногда реализуется на различных уровнях, так что пункт-потребитель одного уровня может стать пунктом-

поставщиком на другом. В таком случае принято говорить о системе управления запасами с разветвленной структурой.

5. *Число видов продукции.* В системе управления запасами может фигурировать более одного вида продукции. Этот фактор учитывается при условии наличия некоторой зависимости между различными видами продукции. Так, для различных изделий может использоваться одно и то же складское помещение или же их производство может осуществляться при ограничениях на общие производственные фонды.

4.2. Основные понятия

Задачи управления запасами составляют один из наиболее многочисленных классов экономических задач. Правильное и своевременное определение оптимальной стратегии управления запасами, а также нормативного уровня запасов позволяет высвободить значительные оборотные средства, замороженные в виде запасов, что в конечном счете повышает эффективность используемых ресурсов.

Рассмотрим основные характеристики моделей управления запасами.

Спрос. Спрос на запасаемый продукт может быть *детерминированным* (в простейшем случае – постоянным во времени) или *случайным.*

Пополнение склада. Пополнение склада может осуществляться периодически через определенные интервалы времени, либо по мере исчерпания запасов, т.е. снижения их до некоторого уровня.

Объем заказа. При периодическом пополнении и случайном исчерпании запасов объем запаса может зависеть от того состояния, которое наблюдается в момент подачи заказа. Заказ обычно подается на одну и ту же величину при достижении запаса заданного уровня – так называемой *точки заказа.*

Время доставки. В идеализированных моделях управления запасами предполагается, что заказанное пополнение доставляется на склад мгновенно. В других моделях рассматривается задержка поставок на фиксированный или случайный интервал времени.

Стоимость поставки. Как правило, предполагается, что стоимость каждой поставки слагается из двух компонент – разовых затрат, не зависящих от объема заказываемых партий, и затрат, зависящих (чаще всего линейно) от объема партий.

Издержки хранения. В большинстве моделей управления запасами считают объем склада практически неограниченным, а в качестве контролирующей величины служит объем хранимых запасов. При этом полагают, что за хранение каждой единицы запаса в единицу времени взимается определенная плата.

Штраф за дефицит. Любой склад создается для того, чтобы предотвратить дефицит определенного типа изделий в обслуживаемой системе: отсутствие запаса в нужный момент приводит к убыткам, связанным с простоем оборудования, неритмичностью производства и т.п. Эти убытки в дальнейшем будем называть *штрафом за дефицит.*

Номенклатура запаса. В простейших случаях предполагается, что на складе хранится запас однотипных изделий или однородного продукта. В более сложных уровнях рассматривается *многономенклатурный запас.*

Структура складской системы. Наиболее полно разработаны математические модели одиночного склада. Однако на практике встречаются и более сложные структуры: иерархические системы складов с различными периодами пополнения и времени доставки заказов, возможностью обмена заказов, возможностью обмена запасами между складами одного уровня иерархии и т.п.

В качестве критерия эффективности принятой стратегии управления запасами выступает *функция затрат (издержек),* представляющая суммарные затраты на хранение и поставку запасаемого продукта (в том числе потери от порчи продукта при хранении и его морального старения, потери прибыли от омертвления капитала и т.п.) и затраты на штрафы.

Управление запасами состоит в отыскании такой стратегии пополнения и расхода запасами, при котором функция затрат принимает минимальное значение.

Ниже рассматриваются простейшие модели управления запасами.

Пусть функции $A(t)$, $D(t)$, и $R(t)$ выражают соответственно пополнение запасов, их расход и спрос на запасаемый продукт за промежуток времени $[0,t]$. В моделях управления запасами обычно используют производные этих функций по времени $a(t)$, $b(t)$, $r(t)$, называемые соответственно *интенсивностями пополнения, расхода и спроса.*

Если функции $a(t)$, $b(t)$, $r(t)$ – неслучайные величины, то модель управления запасами считается детерминированной, если хотя бы одна из них носит случайный характер – стохастической. Если все параметры модели не меняются во времени, она называется статической, в противном случае динамической. Статические модели используются, когда принимается разовое решение об уровне запасов на определенный период, а динамические – в случае принятия последовательных решений об уровнях запаса или корректировке ранее принятых решений с учетом происходящих изменений.

Уровень запаса в момент t определяется основным уравнением запасов:

$$J(t) = J_0 + A(t) - B(t), \tag{4.1}$$

где J_0 – начальный запас в момент $t=0$.

Уравнение (4.1) чаще используется в интегральной форме:

$$J(t) = J_0 + \int_0^t a(t)dt - \int_0^t b(t)dt\ . \qquad (4.2)$$

Пример 4.1. Интенсивность поступления деталей на склад готовой продукции цеха составляет в начале смены 5 дет./мин., в течение первого часа линейно возрастает, достигая к концу его 10 дет./мин., и затем остается постоянной. Полагая, что поступление деталей на склад происходит непрерывно в течение всех семи часов смены, а вывоз деталей со склада производится только в конце работы, записать выражение для уровня запаса в произвольный момент времени и, используя его, найти количество деталей на складе: а) через 30 мин. после начала работы; б) в конце смены.

Решение. По условию в течение смены не происходит выдачи деталей со склада, т. е. $b(t) = 0$. Интенсивность пополнения запаса в течение первого часа линейно возрастает, т. е. $a(t) = kt + b$. Учитывая, что $a(0) = 5$, получаем $b = 5$. Так как в конце часа, т. е. при $t = 60$ $a(60) = 10$, то $10 = k \cdot 60 + 5$, откуда $k = 1/12$. Таким образом, для первого часа смены $a(t) = (1/12)t + 5$, а затем $a(t) = 10$.

Учитывая продолжительность смены (7ч = 420 мин.) и соотношение

$$J(t) = J_0 + \int_0^t a(t)dt - \int_0^t b(t)dt,$$

получаем:

$$J(t) = J_0 + \int_0^t (t/12+5)dt = t^2/24+5t,$$

если $0 \le t \le 60$, и $J(t) = \int_0^{60} (t/12+5)dt + \int_{60}^t 10dt = (t^2/24+5t)\Big|_0^{60} + 10t\Big|_{60}^t = 450 + 10t - 600 =$ $= 10t - 150$, если $60 \le t \le 420$.

Количество деталей на складе через 30 мин. после начала работы: $J(30) = 900/24 + 5*30 = 187{,}5$, в конце смены: $J(420) = 10*24 - 150 = 4050$.

4.3. Однопродуктовая статическая детерминированная модель без дефицита.

Предположение о том, что дефицит не допускается, означает полное удовлетворение спроса на запасаемый продукт, т.е. совпадение функций $r(t)$ и $b(t)$. Пусть общее потребление запасаемого продукта за рассматриваемый интервал времени θ равно N. Рассмотрим простейшую модель, в которой предполагается, что расходование запаса происходит непрерывно с постоянной интенсивностью, т.е. $b(t) = b$. Эту интенсивность можно найти, разделив общее потребление продукта на время, в течении которого он расходуется:

$$b = \frac{N}{\theta}. \tag{4.3}$$

Пополнение запаса происходит партиями одинакового объема, т.е. функция $a(t)$ не является непрерывной: $a(t) = 0$ при всех t, кроме моментов поставки продукта, когда $a(t) = n$, где n – объем партии. Так как интенсивность расхода равна b, то вся партия будет использована за время:

$$T = \frac{n}{b}. \tag{4.4}$$

Если отчет времени начать с момента поступления первой партии, то уровень запаса в начальный момент равен объему этой партии n, т.е. $J(0)=n$. Графически уровень запаса в зависимости от времени представлен на рисунке 4.2.

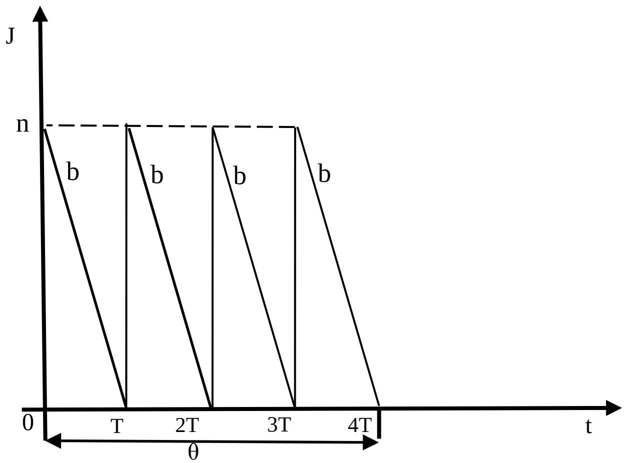

Рис. 4.2

На временном интервале $[0,T]$ уровень запаса уменьшается по прямой $J(t)=n-bt$ от значения n до нуля. Так как дефицит не допускается, то в момент T уровень мгновенно пополняется до прежнего значения n за счет поступления партии заказа. И так процесс изменения $J(t)$ повторяется на каждом временном интервале продолжительностью T (рис. 4.2).

Задача управления запасами состоит в определении такого объема партии n, при котором суммарные затраты на создание и хранение запаса были бы минимальными.

Обозначим суммарные затраты через C, затраты на создание запаса – через C_1, затраты на хранение запаса – через C_2, и найдем эти величины за весь промежуток времени T.

Пусть затраты на доставку одной партии продукта, не зависимые от объема партии, равны c_1, а затраты на хранение одной единицы продукта в единицу времени – c_2. Так как за время θ необходимо запастись N единицами продукта, который доставляется партиями объема n, то число таких партий k равно:

$$k = \frac{N}{n} = \frac{\theta}{T}. \tag{4.5}$$

Отсюда получаем:

$$C_1 = c_1 k = c_1 \frac{N}{n}. \tag{4.6}$$

Мгновенные затраты хранения запаса в момент времени t равны $c_2 J(t)$. Значит, за промежуток времени $[0,T]$ они составят:

$$c_2 \int_0^T J(t)dt = c_2 \int_0^T (n - bt)dt$$

или, учитывая (4.4):

$$c_2 \int_0^T J(t)dt = c_2 \int_0^T \left(n - \frac{n}{T}t\right)dt = c_2 \left(nt - \frac{nt^2}{2T}\right)\Bigg|_0^T = \frac{c_2 nT}{2}.$$

Средний запас за промежуток $[0,T]$ равен $nT/2$, т.е. *затраты на хранение всего запаса при линейном (по времени) его расходе равны затратам на хранение среднего запаса.*

Учитывая периодичность функции $J(t)$ (всего за промежуток времени θ будет $k=N/n$ «зубцов», аналогичных рассмотренных на отрезке $[0,T]$), и формулу (4.5), получаем, что затраты хранения запаса за промежуток времени θ равны:

$$C_2 = \frac{c_2 nT}{2} k = \frac{c_2 nT}{2} * \frac{N}{n} = \frac{c_2 TN}{2} = \frac{c_2 \theta n}{2}\ . \qquad (4.7)$$

Нетрудно заметить, что затраты C_1 обратно пропорциональны, а затраты C_2 прямо пропорциональны объему партии n. Графики функций $C_1(n)$ и $C_2(n)$, а также функции суммарных затрат

$$C = \frac{c_1 N}{n} + \frac{c_2 \theta n}{2} \qquad (4.8)$$

приведены на рисунке 4.3.

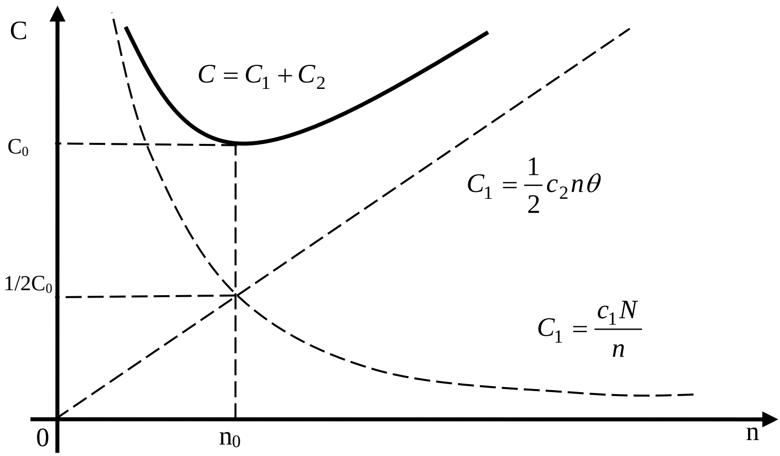

Рис. 4.3

В точке минимума функции $C(n)$ ее производная $C'(n) = -\frac{c_1 N}{n^2} + \frac{c_2 \theta}{2} = 0$, откуда:

$$n = n_0 = \sqrt{\frac{2 c_1 N}{c_2 \theta}} \qquad (4.9)$$

или, учитывая (4.3):

$$n_0 = \sqrt{\frac{2c_1 b}{c_2}}\,. \qquad (4.10)$$

Формула (4.10) называется *формулой Уилсона* или *формулой наиболее экономичного объема партии*, широко используется в экономике. Эта формула может быть получена и другим способом, если учесть, что произведение $C_1C_2=0{,}5c_1c_2N\theta$ есть величина постоянная, не зависящая от n. В этом случае, как известно, сумма двух величин принимает наименьшее значение. Когда они равны, т.е. $C_1=C_2$ или

$$\frac{c_1 N}{n} = \frac{c_2 \theta n}{2}\,. \qquad (4.11)$$

Из (4.11) следует, *что минимум общих затрат задачи управления запасами достигается тогда, когда затраты на создание запаса равны затратам на хранение запаса.* При этом минимальные суммарные затраты:

$$C_0 = C(n_0) = \frac{2c_1 N}{n}\,, \qquad (4.12)$$

откуда, учитывая (4.9) и (4.3), получим $C_0 = \sqrt{2c_1c_2\theta N}$ или

$$C_0 = \theta\sqrt{2c_1c_2 b}\,. \qquad (4.13)$$

Число оптимальных партий за время θ с учетом (4.5), (4.9) и (4.3) равно:

$$k_0 = \frac{N}{n_0} = \sqrt{\frac{c_2 N\theta}{2c_1}} = \theta\sqrt{\frac{c_2 b}{2c_1}}\,.$$

Время расхода оптимальной партии на основании (4.4) с учетом (4.9) и (4.3) равно:

$$T_0 = \frac{n_0}{b} = n_0\,\frac{\theta}{N} \qquad (4.14)$$

или

$$T_0 = \sqrt{\frac{2c_1\theta}{c_2 N}} = \sqrt{\frac{2c_1}{c_2 b}}\,. \qquad (4.15)$$

Пример 4.2. Потребность сборочного предприятия в деталях некоторого типа составляет 120 000 деталей в год, причем эти детали расходуются в процессе производства равномерно и непрерывно. Детали заказываются раз в год и поставляются партиями одинакового объема, указанного в заказе. Хранение детали на складе стоит 0,35 усл. ден. ед. в сутки, а поставка партии — 10 000 усл. ден. ед. Задержка производства из-за отсутствия деталей недопустима. Определить наиболее экономичный объем партии и интервал между поставками, которые нужно указать в заказе (предполагается, что поставщик не допускает задержки поставок).

Решение. По условию затраты на одну партию составляют: c_1 = 10000 ден. ед., затраты хранения единицы запаса в сутки c_2 = 0,35 усл. ден. ед. Общий промежуток времени θ = 1 год – 365 дней, а общий объем запаса за этот период – N = 120 000 деталей. По формуле (4.9) $n_0 = \sqrt{\frac{2*10000*120000}{0{,}35*365}} \approx 4335\ \text{дет.}$, а по формуле (4.14) $T_0 = n_0\frac{\theta}{N} = 13.2 \approx 13\ \text{дней}$.

Итак, наиболее экономичный объем партии равен 4335 деталей, а интервал между поставками ≈ 13 дней.

На практике, естественно, объем партии может отличаться от оптимального n_0, вычисленного по формуле (4.9). Так, в предыдущей задаче может оказаться удобным заказывать партии по 4500 или даже по 5000 деталей, и возникает вопрос, как при этом изменятся суммарные затраты.

Для ответа на этот вопрос разложим функцию $C(n)$ в ряд Тейлора в окрестности точки n_0, ограничившись первыми тремя членами ряда при достаточно малых изменениях объема партии Δn:

$$C(n) = C(n_0) + C'(n_0)\Delta n + \frac{c''(n_0)}{2!}\Delta n^2 + \ldots$$

Учитывая, что при $n = n_0 \times C'(n_0) = 0,\ C''(n_0) = \frac{2c_1N}{n_0^3},\ a\ C_0 = C(n_0)$ определяется по формуле (4.12), найдем:

$$\frac{\Delta C}{C_0} = \frac{C(n) - C(n_0)}{C(n_0)} \approx \frac{C''(n_0)\Delta n^2}{2C(n_0)} = \frac{2c_1 N\Delta n^2}{n_0^3(2c_1N/n_0)}$$

или

$$\frac{\Delta C}{C_0} \approx \frac{1}{2}\left[\frac{\Delta n}{n_0}\right]^2. \qquad (4.16)$$

Формула (4.16) свидетельствует об определенной устойчивости суммарных затрат по отношению к наиболее экономичному объему партии, ибо при малых Δn относительное изменение затрат примерно на порядок меньше относительного изменения объема партии по сравнению с оптимальным.

Пример 4.3. По условию задачи 4.2 определить, на сколько процентов увеличатся затраты на создание и хранение запаса по сравнению с минимальными затратами при объеме заказываемых партий 5000 деталей.

Решение. Относительное изменение объема партии по сравнению с оптимальным n_0 = 4335 составляет $\Delta n/n_0$=(5000-4335)/4335=0,153. В соответствии с (4.16) относительное изменение суммарных затрат составит $\Delta C / C_0 = 0{,}153^2 / 2 \approx 0{,}012$, или лишь 1,2%.

Пример 4.4. В условиях задачи 4.3 предположим, что заказываются не все партии сразу, а каждая отдельно, причем срок выполнения заказа равен 16 дн. Определить точки заказа, т. е., при каком уровне запаса следует заказывать следующую партию.

Решение. Так как по результатам решения задачи 4.2 длина интервала между поставками равна 13,2 дня, то заказ в условиях налаженного производства следует возобновить, когда уровень запаса достаточен для удовлетворения потребности на 16 - 13,2 = 2,8 дня. Так как ежедневная потребность (интенсивность расхода запаса) равна по формуле (4.3) b=120000/365=329 деталей, то заказы должны делаться регулярно при достижении уровня запаса 329 * 2,8 = 922 деталей.

4.4. Однопродуктовая статическая детерминированная модель с дефицитом

В рассматриваемой модели будем полагать наличие *дефицита.* Это означает, что при отсутствии запасаемого продукта, т.е. при $J(t)=0$, спрос сохраняется с той же интенсивностью $r(t)=b$, но потребление запаса отсутствует – $b(t)=0$, вследствие чего накапливается дефицит со скоростью b. График изменения уровня запаса в этом случае представлен на рис. 4.3. Убывание графика ниже оси абсцисс в область отрицательных значений в отличие от графика на рис. 4.2 характеризует накопление дефицита.

Из рис. 4.4 видно, что каждый период «пилы» $T=n/b$ разбивается на два временных интервала, т.е. $T=T_1+T_2$, *где* T_1 – время, в течение которого производится потребление запаса, T_2 – время, когда запас отсутствует и накапливается дефицит, который будет перекрыт в момент поступления следующей партии.

Необходимость покрытия дефицита приводит к тому, что максимальный уровень запаса *s* в момент поступления каждой партии теперь не равен ее объему n, а меньше его на величину дефицита *n-s*, накопившегося за время T_2 (см. рис. 4.4).

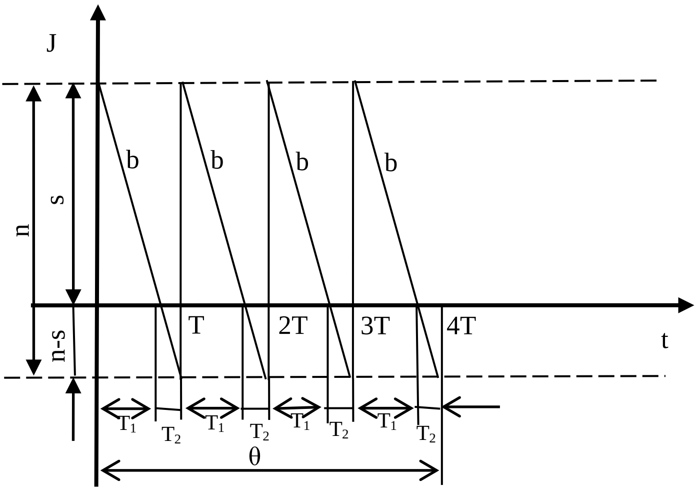

Рис. 4.4

Из геометрических соображений легко установить, что

$$T_1 = \frac{s}{n}T, \quad T_2 = \frac{n-s}{n}T \ . \tag{4.17}$$

В данной модели в функцию суммарных затрат C наряду с затратами C_1 (на пополнение запаса) и C_2 (на хранение запаса) необходимо ввести затраты C_3 – на штраф из-за дефицита, т.е.

$$C = C_1 + C_2 + C_3 \, .$$

Затраты C_1, как и ранее, находим по формуле (4.11). В разделе 4.3 было показано, что затраты C_2 при линейном расходе запаса равны затратам на хранение среднего запаса, который за время потребления T_1 равен $sT_1/2$; поэтому с учетом (4.7) и (4.5) эти затраты составят:

$$C_2 = \frac{c_2 sT_1}{2}k = \frac{c_2 s \cdot sT}{2} \cdot \frac{\theta}{T} = \frac{c_2 s^2 \theta}{2n} \, . \tag{4.18}$$

При расчете затрат C_3 будем считать, что штраф за дефицит составляет в единицу времени c_3 на каждую единицу продукта. Так как средний уровень дефицита за период T_2 равен $(n\text{-}s)T_2/2$, то штраф за этот период T_2 составит $0{,}5c_3(n\text{-}s)T_2$, за весь период θ с учетом (4.17) и (4.18) –

$$C_3 = \frac{1}{2}c_3(n-s)T_2k = \frac{1}{2}c_3(n-s)\frac{n-s}{n}T\frac{\theta}{T} = \frac{c_3\theta(n-s)^2}{2n}. \quad (4.19)$$

Теперь, учитывая (4.12), (4.18) и (4.19), суммарные затраты равны:

$$C = c_1\frac{N}{n} + \frac{c_2\theta s^2}{2n} + \frac{c_3\theta(n-s)^2}{2n}. \quad (4.20)$$

Нетрудно заметить, что при $n=s$ формула (4.19) совпадает с ранее полученной (4.8) в модели без дефицита.

Рассматриваемая *задача управления запасами сводится к отысканию такого объема партии* n *и максимального уровня запаса* s*, при которых функция* C *(4.19) принимает минимальное значение.* Другими словами, необходимо исследовать функцию двух переменных $C(n,s)$ на экстремум. Приравнивая частные производные $\partial C/\partial n$, $\partial C/\partial s$ к нулю, получим после преобразований систему уравнений:

$$\begin{cases} n^2c_3 - (c_2+c_3)s^2 = 2c_1N/\theta, \\ s = n\dfrac{c_3}{c_2+c_3}. \end{cases} \quad (4.21)$$

Решая систему, получаем формулы наиболее экономичного объема партии $\tilde{n}_0$ и максимального уровня запаса $\tilde{s}_0$ для модели с дефицитом:

$$\tilde{n}_0 = \sqrt{\frac{2c_1N}{c_2\theta}}\sqrt{\frac{c_2+c_3}{c_3}} = \sqrt{\frac{2c_1b}{c_2}}\sqrt{\frac{c_2+c_3}{c_3}}, \quad (4.22)$$

$$\tilde{s}_0 = \sqrt{\frac{2c_1N}{c_2\theta}}\sqrt{\frac{c_3}{c_2+c_3}} = \tilde{n}_0\frac{c_3}{c_2+c_3}. \quad (4.23)$$

Величина

$$\rho = \frac{c_3}{c_2 + c_3} \qquad (4.24)$$

называется *плотностью убытков из-за неудовлетворенного спроса* и играет важную роль в управлении запасами. Заметим, что $0 \le \rho \le 1$. Если значение c_3 мало по сравнению с c_2, то величина ρ близка к нулю: когда c_3 значительно превосходит c_2, то ρ близка к 1. Недопустимость дефицита равносильна предположению, что $c_3 = \infty$ или $\rho = 1$.

Используя (4.24), основные формулы (4.22) и (4.23) можно записать компактнее:

$$\tilde{n}_0 = \sqrt{\frac{2c_1 b}{c_2 \rho}}, \qquad (4.25)$$

$$\tilde{s}_0 = \tilde{n}_0 \rho. \qquad (4.26)$$

Следует учесть, что в силу (4.17) и (4.26) $T_1 / T = \tilde{s}_0 / \tilde{n}_0 = \rho$ и $T_2 / T = (\tilde{n}_0 - \tilde{s}_0) / \tilde{n}_0 = 1 - \rho$. Поэтому утверждение о том, что плотность убытков из-за неудовлетворенного спроса равна ρ, означает, что в течение $(1- \rho)100\%$ времени от полного периода T запас продукта будет отсутствовать.

Из сравнения формул (4.25) и (4.10) следует, что оптимальные объемы партий для задач с дефицитом и без дефицита при одинаковых параметрах связаны соотношением:

$$\tilde{n}_0 = \frac{n_0}{\sqrt{\rho}}, \qquad (4.27)$$

откуда вытекает, *что оптимальный объем партии в задаче с дефицитом всегда больше (в* $1/\sqrt{\rho}$ *раз), чем в задаче без дефицита.*

Пример 4.5. Найти наиболее экономичный объем партии и интервал между поставками, сохраняя условия примера 4.2, кроме недопустимости дефицита, если известно, что отсутствие на сборке каждой детали приносит в сутки убытки в размере 3,5 усл. ден. ед.

Решение. По условию $c_3 = 3{,}5$. Ранее было получено по формуле (4.9) $n_0 = 4335$ и по (4.15) $T_0 = 13{,}2$. Найдем плотность убытков из-за неудовлетворенного спроса по формуле (4.24) $\rho = 3{,}5/(0{,}35 + 3{,}5) = 0{,}909$, т.е. 100 (1-0,909) = 9,1% времени между поставками детали на сборке будут отсутствовать.

Теперь оптимальный размер партии по формуле (4.27) $\tilde{n}_0 = 4335/\sqrt{0{,}909} = 4547$. Пропорционально увеличению $\tilde{n}_0$ должен увеличиться интервал между поставками, т.е.

$$\tilde{T}_0 = \frac{T_0}{\sqrt{\rho}} = \frac{13{,}2}{\sqrt{0{,}909}} = 13{,}8 \approx 14 \text{ дней} \cdot$$

4.5. Многопродуктовая статическая модель с ограничениями

При рассмотрении однопродуктовых моделей считалось, что каждый вид продукции не зависит от остальных и что он хранится самостоятельно или изготавливается на своем собственном оборудовании. На практике запас, как правило, включает несколько видов продукции, независимое изучение которых можно провести лишь в том случае, если между ними отсутствует взаимодействие. Это взаимодействие может носить различный характер. Например, изделия могут частично заменять друг друга, изделия могут конкурировать при ограничении на площадь склада. Может существовать верхний предел общего числа заказов, и потому изделия могут вступать в конкуренцию из-за этого фактора. Может существовать верхний предел и для максимальных капиталовложений в запасы. Подобные ограничения могут потребовать изменения размера заказа с тем, чтобы он соответствовал имеющимся ресурсам. Рассмотрим несколько характерных случаев, когда ограничения налагаются на емкость склада, число заказов на пополнение и максимальные вложения в запасы.

1 случай. Рассмотрим модель системы управления запасами включающей $m > 1$ видов изделий, которые хранятся на одном складе с ограниченной емкостью.

Пусть A - максимально допустимая площадь складского помещения для m видов изделий и что для j-ого изделия требуется площадь a_j. Если h_j - размер поставки изделий j-ого вида, то должно выполняться неравенство

$$\sum_{j=1}^{m} a_j n_j \leq A \tag{4.28}$$

Предположим, что запасы каждого вида изделий пополняются мгновенно и дефицит недопустим.

Пусть b_j, C_{1j}, C_{2j} - интенсивность спроса, затраты на оформление поставки и затраты на хранение одного изделия в единицу времени для j-го вида.

Суммарные затраты:

$$C(n_1, n_2, ..., n_m) = \sum_{j=1}^{m}\left(\frac{C_{1j}b_j}{n_j} + \frac{C_{2j}n_j}{2}\right) \tag{4.29}$$

Необходимо найти минимум C по n_j, при $0 < n_j < \infty$, $j = \overline{1, m}$, с учетом ограничения (4.28).

Сначала решают задачу (4.29) без ограничений, то есть определяют оптимальные размеры партий для каждого типа изделий по формулам (4.29, 4.31). Если ограничения (4.28) выполняется, решение задачи на этом заканчивается. В противном случае для определения оптимальных значений n_j может быть использован метод множителей Лагранжа. Конечная формула для расчета выглядит следующим образом:

$$n_j^* = \sqrt{\frac{2c_{1j}b_j}{c_{2j} - 2\lambda^* a_j}}, \tag{4.30}$$

где λ^* - такое значение λ, при котором $n^*{}_j$, найденное из выражения (4.30) удовлетворяло (4.28).

Значения λ^* определяется методом проб и ошибок.

2 случай. Ограничение на общее число заказов. Сделаем допущение, что в течение планируемого периода может быть подано не более k заявок на поставки запасов. Это означает, что

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{N_j}{n_j} \le k \tag{4.31}$$

Если считать, что фиксированные затраты, связанные с подачей заявок, равны нулю, то суммарные издержки содержания

$$C = \sum_{j=1}^{m} c_{2j} \cdot \frac{n_j}{2} \tag{4.32}$$

Требуется найти минимум (4.32) при ограничении (4.31). Так как в (4.32) учитываются только затраты на хранение, то ограничение (4.31) будет всегда существенным, то есть будет сделано максимально возможное число заказов, что позволит сократить затраты на хранение.

Для определения оптимального n_j вновь воспользуемся методом множителей Лагранжа.

Оптимальным решением является

$$n_j^* = \sqrt{\frac{2\lambda^* b_j}{c_{2j}}}, \qquad j = \overline{1, m} \tag{4.33}$$

$$\lambda^* = \left(\frac{1}{\sqrt{2 \cdot k}} \cdot \sum_{j=1}^{m} \sqrt{b_j c_{2j}}\right)^2 \tag{4.34}$$

Выражение (4.34) позволяет непосредственно определить значение множителя Лагранжа. Это значение можно рассматривать как назначенные затраты, связанные с подачей заявок.

3 случай. Ограничение на капиталовложения в управлении запасами. Эта модель предназначена для систем управления запасами, когда в каждый момент времени существует верхний предел *D* капиталовложений в систему управления запасами. Ограничение в этом случае имеет вид:

$$\sum_{j=1}^{m} c_j \cdot n_j \le D \tag{4.35}$$

где c_j - стоимость единицы продукции *j*-того выпуска.

Требуется минимизировать выражение (4.29), при наличие ограничения (4.35). Ограничение (4.35) формально эквивалентно ограничению на площадь склада. Следовательно, можно записать

$$n_j^* = \sqrt{\frac{2c_{1j} \cdot b_j}{c_{2j} - 2\lambda^* c_j}}$$

4.6. Стохастические модели управления запасами

Рассмотрим *стохастические модели управления запасами*, у которых спрос является *случайным.* Этот факт существенным образом сказывается на характере соответствующих моделей и значительно усложняет их анализ, в связи с чем ограничимся рассмотрением наиболее простых моделей. Предположим, что спрос r за интервал времени *T* является случайным и задан его закон (ряд) распределения *p(r)* или плотность вероятностей *φ(r)* (обычно функции *p(r)* и *φ(r)* оцениваются на основании опытных или статистических данных). Если спрос r ниже уровня запаса *s*, то приобретение (хранение, продажа) излишка продукта требует дополнительных затрат c_2 на единицу продукта; наоборот, если спрос *r* выше уровня запаса *s*, то это приводит к штрафу за дефицит c_3 на единицу продукции.

В качестве функции суммарных затрат, являющейся в стохастических моделях случайной величиной, рассматривают ее среднее значение или математическое ожидание.

В рассматриваемой модели при дискретном случайном спросе *r*, имеющем закон распределения *p(r)*, математическое ожидание суммарных затрат имеет вид:

$$C(s) = c_2 \sum_{r=0}^{s} (s-r)p(r) + c_3 \sum_{r=s+1}^{\infty} (r-s)p(r)\,. \tag{4.36}$$

В выражении (4.36) первое слагаемое учитывает затраты на приобретение (хранение) излишка *s-r* единиц продукта (при $r \le s$), а второе слагаемое – штраф за дефицит на *r-s* единиц продукта (при $r > s$).

В случае непрерывного случайного спроса, задаваемого плотностью вероятностей *φ(r)*, выражение *C(s)* принимает вид:

$$C(s) = c_2 \int_0^s (s-r)\varphi(r)dr + c_3 \int_0^s (r-s)\varphi(r)dr\,. \tag{4.37}$$

Задача управления запасами состоит в отыскании такого запаса s, *при котором математическое ожидание суммарных затрат (4.36) и (4.37) принимает минимальное значение.*

Доказано, что при дискретном случайном спросе *r* выражение (4.36) минимально при запасе s_0, удовлетворяющем неравенствам:

$$F(s_0) \prec \rho \prec F(s_0+1)\,, \tag{4.38}$$

а при непрерывном случайном спросе *r*, выражение (4.37) минимально при значении s_0, определяемом из уравнения:

$$F(s_0) = \rho\,, \tag{4.39}$$

где

$$F(s) = p(r \prec s) \tag{4.40}$$

есть функция распределения спроса r, $F(s_0)$, $F(s_0+1)$ – ее значения; ρ – плотность убытков из-за неудовлетворенного спроса, определяемая по (4.24).

Оптимальный запас s_0 при непрерывном спросе по данному значению ρ может быть найден и графически (см. рис. 4.5).

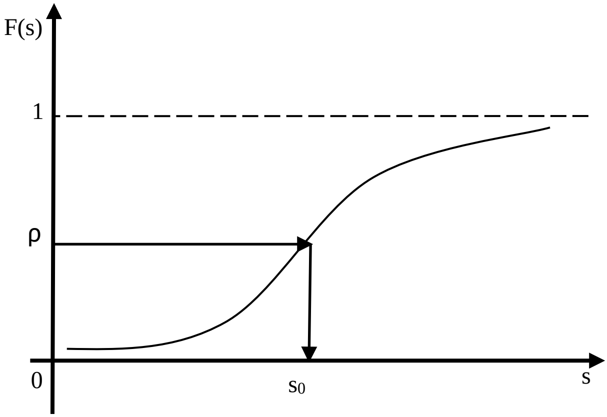

Рис. 4.4

Рис 4.5.

Пример 4.6. Предприятие закупает агрегат с запасными блоками к нему. Стоимость одного блока равна 5 усл. ден. ед. В случае выхода агрегата из строя из-за поломки блока, отсутствующего в запасе, простой агрегата и срочный заказ нового блока к нему обойдется в 100 усл. ден. ед. Опытное распределение агрегатов по числу блоков, потребовавших замену, представлено в табл. 4.1.

Таблица 4.1

Число замененных блоков	0	1	2	3	4	5	6
Статистическая вероятность (доля) агрегатов $p(r)$, которым потребовалась замена r блоков	0,90	0,05	0,02	0,01	0,01	0,01	0,00

Необходимо определить оптимальное число запасных блоков, которое следует приобрести вместе с агрегатом.

Решение. По условию $c_2 = 5$, $c_3 = 100$. Вычислим плотность убытков из-за нехватки запасных блоков по формуле (4.24) ρ= 100/(5+100) =0,952.

Учитывая (4.40), найдем значения функции распределения спроса (табл. 4.2).

Таблица 4.2

S	0	1	2	3	4	5	>5
F(s)	0,00	0,90	0,95	0,97	0,98	0,99	1.00

Очевидно, (см. табл. 4.2), что оптимальный запас составит $s_0 = 2$, ибо он удовлетворяет неравенству (4.38): $F(2) < 0{,}952 < F(3)$.

Пример 4.7. Решить пример 4.6 при условии непрерывного случайного спроса r, распределенного по показательному закону с функцией распределения $F(r) = 1 - e^{\lambda r}$ при $\lambda = 0{,}98$.

Решение. Оптимальное число запасных блоков s_0 найдем используя уравнение (4.31): $1 - e^{-\lambda s_0} = \rho$, откуда $1 - e^{-\lambda s_0} = 1 - \rho$ и $s_0 = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-\rho)$. При $\lambda = 0{,}98$ $\quad s_0 = -(1/0{,}98)\ln 0{,}02 \approx 4$ (блока).

В условиях рассматриваемой модели предположим, что расходование запаса происходит непрерывно с одинаковой интенсивностью. Такую ситуацию можно представить графически (рис. 4.6).

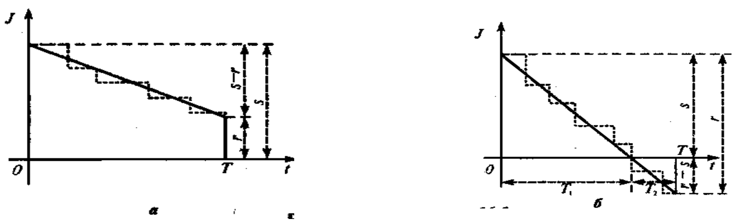

Рис. 4.6

Рис. 4.6, а соответствует случаю $r \le s$, когда спрос не превосходит запаса, а рис. 4.6, б — случаю, когда спрос превышает запас, т.е. $r > s$. Следует отметить, что на самом деле график $J(t)$ представляет ступенчатую ломаную, показанную на рис. 4.6 пунктиром, но для исследования модели нам проще рассматривать $J(t)$ в виде прямой, сглаживающей эту ломаную.

Средний запас, соответствующий рис. 4.6, а, равен:

$$\tilde{s}_1 = \frac{1}{2}(s + (s - r)) = s - \frac{1}{2}r. \tag{4.41}$$

Средний запас, соответствующий рис. 4.6., б с учетом формулы (4.17), в которой полагаем $n = r$, составляет:

$$\tilde{s}_2 = \frac{1}{2}s\frac{T_1}{T} = \frac{1}{2}\frac{s^2}{r}. \tag{4.42}$$

Средний дефицит продукта за период T_2 для случая, соответствующего рис. 4.6, б с учетом (4.17), где $n=r$, равен

$$\tilde{s}_3 = \frac{1}{2}(r-s)\frac{T_2}{T_1} = \frac{1}{2}\frac{(r-s)^2}{r}. \qquad (4.43)$$

Математическое ожидание суммарных затрат составит:

$$C(s) = c_2\sum_{r=0}^{s}\left[s-\frac{r}{2}\right]p(r) + c_2\sum_{r=s+1}^{\infty}\frac{1}{2}\frac{s^2}{r}p(r) + c^3\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{2}\frac{(r-s)^2}{r}p(r)\cdot \qquad (4.44)$$

Доказано, что в этом случае математическое ожидание (4.44) минимально при запасе s_0, удовлетворяющем неравенству:

$$L(s_0) < \rho < L(s_0+1), \qquad (4.45)$$

где ρ по-прежнему определяется по формуле (4.24),

$$L(s) = F(s) + \left[s-\frac{1}{2}\right]\sum_{r=s}^{\infty}\frac{p(r)}{r}, \qquad (4.46)$$

$L(s_0)$ и $L(s_0+1)$ — значения функции (4.46), а $F(s)$ находится в соответствии с формулой (4.40).

Пример 4.8. Имеющиеся на складе изделия равномерно расходуются в течение месяца. Затраты на хранение одного изделия составляют 5 усл. ден. ед., а штраф за дефицит одного изделия обходится в 100 усл. ден. ед. Изучение спроса дало распределение числа потребляемых за месяц изделий, представленное в табл. 4.3.

Таблица 4.3

Спрос r	0	1	2	3	4	5	≥6
Статическая вероятность $p(r)$	0.1	0.2	0.2	0.3	0.1	0.1	0.0

Необходимо определить оптимальный месячный запас склада.

Решение. Так же, как в примере 4.6, $c_2 = 5$, $c_3 = 100$, $\rho = 0{,}952$.

Значения функции $L(r)$ определим с помощью табл. 4.4

Таблица 4.4

s	r	p(r)	$\frac{p(r)}{r}$	$\sum_{r=s}^{\infty}\frac{p(r)}{r}$	$\left(s-\frac{1}{2}\right)\sum_{r=s}^{\infty}\frac{p(r)}{r}$	F(r)	L(r)
0	0	0,1	-	-	-	0,0	-
1	1	0,2	0,200	0,445	0,2225	0,1	0,3225
2	2	0,2	0,100	0,245	0,3675	0,3	0,6675
3	3	0,3	0,100	0,145	0,3625	0,5	0,8625
4	4	0,1	0,025	0,045	0,1575	0,8	0,9575
5	5	0,1	0,020	0,020	0,0900	0,9	0,9900
≥6	≥6	0,0	0,000	0,000	0,0000	1,0	1,0000

Очевидно, что оптимальный запас изделий s_0= 3, ибо он удовлетворяет условию (4.37): $L(3)$<0,952<$L(4)$.

4.7. Стохастические модели управления запасами с фиксированным временем задержки поставок

В рассмотренных выше идеализированных моделях управления запасами предполагалось, что пополнение запаса происходит практически мгновенно. Однако в ряде задач *время задержки* поставок может оказаться настолько значительным, что его необходимо учитывать в модели.

Пусть за время задержек поставок θ уже заказаны n партий по одной в каждый из n периодов продолжительностью $T=\theta/n$. Обозначим:

$s_{из}$ – первоначальный уровень запаса (к началу первого периода);

s_i – запас за i-й период;

r_i – спрос за i-й период;

q_i – пополнение запаса за i-й период.

Тогда к концу n-го периода на склад поступит $\sum_{i=1}^{n} q_i$ единиц продукта, а будет израсходовано $\sum_{i=1}^{n} r_i$ единиц, т.е.:

$$s_n = s_{из} + \sum_{i=1}^{n} q_i - \sum_{i=1}^{n} r_i \;, \tag{4.47}$$

или

$$s_n = s - r \;, \tag{4.48}$$

где

$$s = s_{из} + \sum_{i=1}^{n} q_i \ , \quad (4.49)$$

$$r = \sum_{i=1}^{n} r_i \ . \quad (4.50)$$

Требуется найти оптимальный объем партии заказа, который необходимо сделать за последний n-й период, предшествующий поступлению сделанного ранее заказа.

Математическое ожидание суммарных затрат в этом случае определяется по формуле (4.36), а оптимальный запас s находится по формуле (4.38), т.е.

$$F(s_0) < \rho < F(s_0 + 1) \, . \quad (4.51)$$

Найдя оптимальный запас s_0 и зная $q_1, q_2, ..., q_{n-1}$, можно вычислить q_n из формулы (4.49), т.е.:

$$q_n = s_0 - (s_{из} + \sum_{i=1}^{n} q_i) \, . \quad (4.52)$$

Пример 4.9. Ежедневно заказываемый скоропортящийся товар поступает в магазин спустя 7 дней после заказа. В момент очередного заказа запас товара составил в стоимостном выражении 10 усл. ден. ед. В течение первых шести дней объем пополнения равен соответственно 10, 20, 10, 10, 20, 10. Проданное в день изготовления, приносит прибыль 0,95 усл. ден. ед., а не проданный в этот день товар может быть затем реализован с убытком 0,10 усл. ден. ед.

На основании опытных данных получено следующее распределение спроса на данный товар (табл. 4.5).

Таблица 4.5

r	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
p(r)	0,00	0,00	0,01	0,02	0,05	0,08	0,11	0,12	0,14	0,13	0,10
r	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200	>200
p(r)	0,08	0,05	0,03	0,02	0,02	0,01	0,01	0,01	0,01	0,00	0,00

Необходимо определить оптимальный объем заказанного товара q_7 на седьмой день после заказа.

Решение. Плотность убытков из-за дефицита товара по формуле (4.24) равна: ρ = 0,95/(0,10 + 0,95) = 0,905. Учитывая условия (4.40), найдем значения функции распределения спроса (табл. 4.6).

Таблица 4.6

s	r	F(s)	s	r	F(s)	s	r	F(s)	s	r	F(s)
0	0	0,00	50	50	0,16	100	100	0,86	150	150	0,96
10	10	0,00	60	60	0,27	110	110	0,84	160	160	0,97
20	20	0,01	70	70	0,39	120	120	0,89	170	170	0,98
30	30	0,03	80	80	0,53	130	130	0,92	180	180	0,99
40	40	0,08	90	90	0,76	140	140	0,94	≥190	≥190	1,00

Условию (4.51) удовлетворяет s_0 = 120, ибо F(120) < 0,905 < F(130).

Таким образом, оптимальный запас товара за 7 дней должен быть на сумму 120 усл. ден. ед., откуда оптимальный объем заказанного товара на седьмой день по формуле (4.52) составит: q_7 = 120 - (10 + (10 + 20 +10 +10 + 20 +10)) = 30 усл. ден. ед.

В заключение отметим, что найти аналитически оптимальные значения точки запаса s_0 и объема партии n удается только в относительно простых случаях. Если же система хранения запасов имеет сложную структуру (много видов хранимой продукции, иерархическая система складов), используемые стохастические модели сложны, а их параметры меняются во времени, то единственным средством анализа такой системы становится *имитационное моделирование*, позволяющее имитировать ("проигрывать") на ЭВМ функционирование системы, исследуя ее поведение при различных условиях, значениях параметров, отражая их случайный характер, изменение во времени и т. п.

Вопросы и задания для самопроверки

1. В чем суть постановки классической задачи управления запасами?

2. Как определяется размер оптимальной партии поставки в однопродуктовой статической модели в классической постановке (формула Уилсона)?

3. В чем состоит задача управления запасами в однопродуктовой статической детерминированной модели без дефицита?

5. Из каких составляющих состоит функция суммарных затрат в однопродуктовой статической детерминированной модели с дефицитом?

4. Дайте описание многопродуктовой статической модели управления запасами с ограничениями.

5. В чем состоит задача управления запасами в стохастической модели?

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Вариант 1

В данном случае пополнение запаса происходит мгновенно и дефицит не допускается. Найдите экономичный размер заказа, соответствующие суммарные затраты и интервал времени между двумя заказами:

C_1=100 грн, b=0,05 грн, C_2 =30 ед./день.

Определите точку возобновления заказа, предполагая, что срок выполнения заказа равен 14 дням.

Вариант 2

На склад доставляется на барже цемент партиями по 1500 т. В сутки со склада потребители забирают 50 т цемента. Накладные расходы по доставке партии цемента равны 2 млн руб. Издержки хранения 1 т цемента в течение суток равны 100 грн. Требуется определить:

1) длительность цикла и среднесуточные накладные и среднесуточные издержки хранения;

2) эти же величины для размеров партии в 500 т и в 3000 т;

3) оптимальный размер заказываемой партии и расчетные характеристики работы склада в оптимальном режиме.

Вариант 3

Ежедневный спрос на некоторый товар составляет около 100 ед. Затраты на размещение каждого запаса постоянны и равны 100 грн. Ежедневные затраты на хранение единицы запаса составляют 0,02 грн. Нужно определить экономичный размер партии и точку заказа при сроке выполнения заказа, равном 12 дням.

Вариант 4

Интенсивность поступления деталей на склад в течение первых 50 мин. растет по закону $a(t) = 0{,}2t+5$, а затем до конца смены остается постоянной. Найти количество деталей на складе: а) через 10 мин. после начала работы; б) в конце работы.

Вариант 5

Фирма хранит изделие, потребляемое с интенсивностью 50 ед. в день. Она несет расходы в 25 грн при размещении каждого заказа. Хранение одного изделия в течение одной недели обходится в 70 грн Определите оптимальное число заказов (округленное до ближайшего целого числа), которое фирма должна размещать ежегодно, предполагая, что фирма придерживается стратегии, не допускающей дефицита.

Вариант 6

Потребность сборочного предприятия в деталях некоторого типа составляет 240000 деталей в год, причем эти детали расходуются в процессе производства равномерно и непрерывно. Детали заказываются раз в год и поставляются партиями одинакового объема, указанного в заказе. Хранение детали на складе стоит 0,50 усл. ден. ед. в сутки, а поставка партии — 12000 усл. ден. ед. Задержка производства из-за отсутствия деталей недопустима. Определить наиболее экономичный объем партии и интервал между поставками, которые нужно указать в заказе (предполагается, что поставщик не допускает задержки поставок).

Найти изменение затрат на создание и хранение запаса при изменении объема партии на 15%.

Вариант 7

Фирма пополняет запас некоторого изделия, заказывая его в количестве, достаточном для покрытия одномесячного спроса. Годовой спрос на изделие равен 1500 ед. Каждое размещение заказа оценивается затратами в 20 грн. Затраты на хранение одного изделия в течение месяца составляют 2 грн, задолженность не допускается.

(а) Определите оптимальный размер заказа и интервал времени между моментами размещения заказов.

(б) Определите различие в годовых затратах на хранение системы при оптимальной и применяемой стратегиях. Последняя предусматривает размещение заказов в размере месячной потребности ежемесячно в течение года.

Вариант 8

В данном случае пополнение запаса происходит мгновенно и дефицит не допускается. Найдите экономичный размер заказа, соответствующие суммарные затраты и интервал времени между двумя заказами:

C_1=100 грн, b =0,01 грн, C_2 =40 ед./день.

Определите точку возобновления заказа, предполагая, что срок выполнения заказа равен 40 дням.

Вариант 9

Ежедневный спрос на некоторый продукт составляет 100 ед. Затраты на приобретение каждой партии этого продукта, не зависимые от объема партии, равны 100 усл. ден. ед., а затраты на хранение единицы продукта – 0,02 усл. ден. ед. в сутки. Определите наиболее экономичный объем партии и интервал между поставками партий такого объема в предположении, что возможен дефицит, который приносит 0,03 усл. ден. ед. убытка в день на единицу продукта.

Вариант 10

Пусть C_1 =100 долл., ожидаемый суммарный годовой спрос – 1000 ед., удельные потери от дефицита (на единицу продукции за год) – 10 грн. и удельные затраты хранения (на единицу продукции за год) – 2 грн., и предположим, что в течение срока выполнения заказа спрос имеет равномерное распределение в интервале от 0 до 100. Определите значения следующих величин: приблизительное годовое число заказов, годовые затраты на оформление заказа, ожидаемые годовые затраты на хранение.

Вариант 11

Фирма может производить изделие или покупать его. Если фирма сама выпускает изделие, то каждый запуск его в производство обходится в 20 грн. Интенсивность производства составляет 100 ед. в день. Если изделие закупается, то затраты на размещение каждого заказа равны 15 грн. Затраты на содержание изделия в запасе независимо от того, закупается оно или производится, равны 0,02 долл. в день. Потребление изделия предприятием оценивается в 26000 ед. в год. Предполагая, что фирма работает без дефицита, определите, что выгоднее: закупать или производить изделие?

Вариант 12

Запас может пополняться мгновенно после размещения заказа. Спрос имеет постоянную интенсивность 50 ед. в каждую единицу времени. Размещение каждого заказа обходится в 400 грн. Хотя дефицит и допускается, его величина в соответствии со стратегией фирмы не должна превышать 20 ед. Между тем вследствие бюджетных ограничений единовременно можно заказать не более 200 ед. Определите взаимозависимость между предполагаемыми затратами на хранение и потерями от дефицита на единицу продукции при оптимальных условиях.

Вариант 13

Кондитерское предприятие торгует вразвес своими тортами. Каждый килограмм торта приносит 2 ден. ед. прибыли. Все торты можно продать на следующий день со скидкой 0,2 ден. ед. На основании опыта получено распределение спроса на торты, представленное в таблице 4.3. Найти оптимальную дневную выработку тортов.

Вариант 14

Решить вариант 13 при условии, что спрос на торты есть случайная величина, распределенная по показательному закону с параметром $\lambda = 0,9$.

Вариант 15

Склад пополняется каждый месяц некоторыми изделиями. В течение первых пяти месяцев года объемы пополнения равны соответственно 10, 20, 20, 20 и 30 изделиям. Начальный запас к началу первого месяца равен 10 изделиям. На основании опыта получено распределение спроса на товар, представленное в таблице 4.5. Сдвиг по времени между заказом на пополнение и доставкой на склад равен 6 мес. Издержки в расчете на одно изделие из-за излишка изделий равны 10 ден. ед., а от их нехватки – 120 ден. ед. Найти оптимальное пополнение склада на шестой месяц.

5. МОДЕЛИРОВАНИЕ СПРОСА И ПОТРЕБЛЕНИЯ

5.1 Целевая функция потребления и моделирование поведения потребителей

В соответствии с задачами и функциями маркетинг понимается как рыночная система управления производственной и сбытовой деятельностью, при которой в основе принятия хозяйственных решений лежит рыночная информация, а обоснованность решений проверяется рынком в ходе реализации товаров и услуг. При таком подходе начальным пунктом всего цикла предпринимательской деятельности становится изучение потребительского спроса. Рассмотрим некоторые вопросы моделирования спроса и потребления в маркетинге.

Уровень удовлетворения материальных потребностей общества (уровень потребления) можно выразить целевой функцией потребления $U = U(Y)$, где вектор переменных $Y \geq 0$ включает разнообразные виды товаров и услуг. Ряд свойств этой функции удобно изучать, используя геометрическую интерпретацию уравнений $U(Y) = C$, где C – параметр, характеризующий значение (уровень) целевой функции потребления; в качестве величины C может выступать, например, доход или уровень материального благосостояния.

В пространстве потребительских благ каждому уравнению $U(Y) = C$ соответствует определенная поверхность равноценных, или безразличных наборов благ, которая называется поверхностью безразличия. Для наглядности рассмотрим пространство двух благ, например, в виде двух агрегированных групп товаров: продукты питания (y_1) и непродовольственные товары, включая услуги (y_2). Тогда уровни целевой функции потребления можно изобразить на плоскости в виде кривых безразличия, соответствующих различным значениям C (см. рис. 5.1, где $C_1 < C_2 < C_3$).

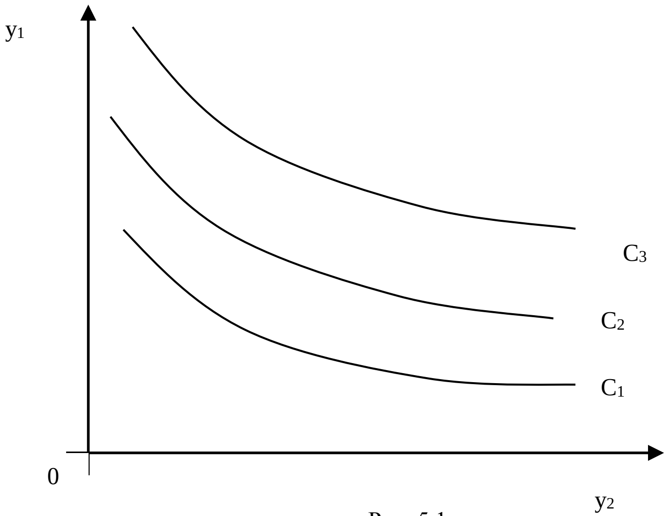

Рис. 5.1

Будем в дальнейшем пользоваться термином «кривые безразличия» вне зависимости от размерности пространства потребительских благ (количества групп товаров).

Среди основных свойств целевой функции потребления следует отметить следующее:

1. Функция *U(Y)* является возрастающей функцией всех своих аргументов, т. е. увеличение потребления любого блага при неизменном уровне потребления всех других благ увеличивает значение данной функции. Поэтому более удаленная от начала координат кривая безразличия соответствует большему значению целевой функции потребления, а сам процесс максимизации этой функции на некотором ограниченном множестве допустимых векторов У можно интерпретировать как нахождение допустимой точки, принадлежащей кривой безразличия, максимально удаленной от начала координат.

2. Кривые безразличия не могут пересекаться, т. е. через одну точку пространства благ (товаров, услуг) можно провести только одну поверхность безразличия. В противном случае один и тот же набор благ одновременно соответствовал бы нескольким разным уровням материального благосостояния.

3. Кривые безразличия имеют отрицательный наклон к каждой оси координат, при этом абсолютный наклон кривых уменьшается при движении в положительном направлении по каждой оси, т. е. кривые безразличия являются выпуклыми кривыми.

Методы построения целевой функции потребления основаны на обобщении опыта поведения потребителей и тенденций покупательского спроса в зависимости от уровня благосостояния. В качестве примера приведем квадратичную целевую функцию потребления для трех агрегированных групп товаров, построенную на основе обработки данных бюджетной статистики:

$$U\ (У) = (1 - 1{,}8410)y_1 + (1 - 2{,}054a)y_2 + (1 - 2{,}116a)y_3 + 0{,}668 \bullet 10^{-4}\, y_1^2 + 1{,}230 \bullet$$
$$\bullet\, 10^{-4}\, y_1y_2 + 1{,}243 \bullet 10^{-4}\, y_1 \bullet y_3 + 0{,}506\text{-}10^{-4}\, y_2^2 + 1{,}104\text{-}10^{-4} y_2y_4 + 0{,}492 \bullet 10^{-4}\, y_3^2,$$

где параметр a обозначает число детей в семье, y_1 – потребление продуктов питания, y_2 – потребление промышленных товаров, y_3 – потребление платных услуг (в стоимостном выражении).

Перейдем к вопросу моделирования поведения потребителей в условиях товарно-денежных отношений на базе целевой функции потребления. В основе модели поведения потребителей лежит гипотеза, что потребители, осуществляя выбор товаров при установленных ценах и имеющемся доходе, стремятся максимизировать уровень удовлетворения своих потребностей.

Пусть в пространстве n видов товаров исследуется поведение совокупности потребителей. Обозначим спрос потребителей через вектор $Y=(y_1, y_2,..., y_n)$, а цены на различные товары – через вектор $P = (p_1,p_2, ...,p_n)$. При величине дохода D потребители могут выбирать только такие комбинации товаров, которые удовлетворяют бюджетному ограничению $\sum_{i=1}^{n} p_i y_i \le D$. Предположим, что предпочтение потребителей на множестве товаров выражается целевой функцией потребления $U(Y)$. Тогда простейшая модель поведения потребителей в векторной форме записи будет иметь вид:

$$\begin{gathered} U(Y) \to max; \\ P{\cdot}Y \le D; \\ Y \ge 0. \end{gathered} \tag{5.1}$$

Геометрическая интерпретация модели (5.1) для двух агрегированных групп товаров представлена на рис. 5.2.

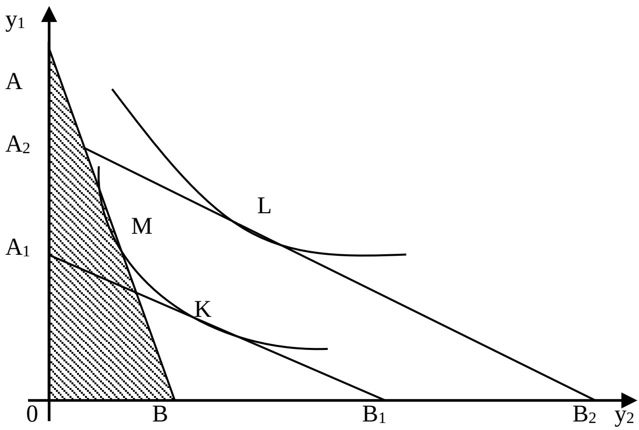

Рис. 5.2

Линия AB (в других вариантах A_1B_1, A_2B_2) соответствует бюджетному ограничению и называется *бюджетной линией*. Выбор потребителей ограничен треугольником AOB (A_1OB_1, A_2OB_2). Набор товаров M, соответствующий точке касания прямой AB наиболее отдаленной кривой безразличия, является оптимальным решением (в других вариантах это точки K и L). Легко заметить, что линии AB и A_1B_1 соответствуют одному и тому же размеру дохода и разным ценам на товары y_1 и y_2; линия A_2B_2 соответствует большему размеру дохода. Опираясь на некоторые выводы теории нелинейного программирования, можно дать математические условия оптимальности решений для модели (5.1). С задачей нелинейного программирования связывается так называемая функция Лагранжа, которая для задачи (5.1) имеет вид:

$$L\ (Y,X) = U(Y) + \lambda(D-P\cdot Y),$$

где множитель Лагранжа λ является оптимальной оценкой дохода. Обозначим частные производные функции $U(Y)$ через U_i: $U_i = \dfrac{\partial U(Y)}{\partial y_i}$. Эти производные интерпретируются как предельные полезные эффекты *(предельные полезности)* соответствующих потребительских благ, т. е. они характеризуют прирост целевой функции потребления при увеличении использования i-го блага (товара) на некоторую условную «малую единицу».

Необходимыми условиями того, что вектор Y^0 будет оптимальным решением, являются условия Куна-Таккера:

$$U_i(Y^0) \le \lambda^0 \cdot p_i;\ i = \overline{1, n}, \qquad (5.2)$$

при этом:

$U_i(Y^0) = \lambda^0 \cdot p_i$, если $y^0_i > 0$ (товар приобретается);

$U_i(Y^0) < \lambda^0 \cdot p_i$, если $y^0_i = 0$ (товар не приобретается);

$P \cdot Y^0 = D$.

Последнее из соотношений (5.2) соответствует полному использованию дохода, и для этого случая очевидно неравенство $\lambda^0 > 0$.

Из условий оптимальности (5.2) следует, что:

$$\frac{U_i(Y^0)}{p_i} = \lambda^0, \text{ если } y^0_i > 0.$$

Это означает, что потребители должны выбирать товары таким образом, чтобы отношение предельной полезности к цене товара было одинаковым для всех приобретаемых товаров. Другими словами, в оптимальном наборе предельные полезности выбираемых товаров должны быть пропорциональны ценам.

5.2. Функции покупательского спроса

Функциями покупательского спроса (в дальнейшем будем называть их просто функциями спроса) называются функции, отражающие зависимость объема спроса на отдельные товары и услуги от комплекса факторов, влияющих на него. Такие функции применяются в аналитических моделях спроса и потребления и строятся на основе информации о структуре доходов населения, ценах на товары, составе семей и других факторах. Рассмотрим построение функций спроса в зависимости от двух факторов: дохода и цен.

Пусть в модели (5.1) цены и доход рассматриваются как меняющиеся параметры. Переменную дохода будем обозначать Z. Тогда решением оптимизационной задачи (5.1) будет векторная функция $Y° = Y°(P, Z)$, компонентами которой являются функции спроса на определенный товар от цен и дохода: $y_i^0 = fi(P,Z)$.

Рассмотрим частный случай, когда вектор цен остается неизменным, а изменяется только доход. Для двух товаров этот случай представлен на рис. 5.3. Если по оси абсцисс отложить количество единиц товара y_1, которое можно приобрести на имеющийся доход Z (точка B), а по оси ординат – количество товара y_2 той же стоимости (точка A), то прямая линия AB, называемая бюджетной линией, показывает любую комбинацию количеств этих двух товаров, которую можно купить за сумму денег Z. При увеличении дохода бюджетные линии перемещаются параллельно самим себе, удаляясь от начала координат. Вместе с ними перемещаются соответствующие кривые безразличия.

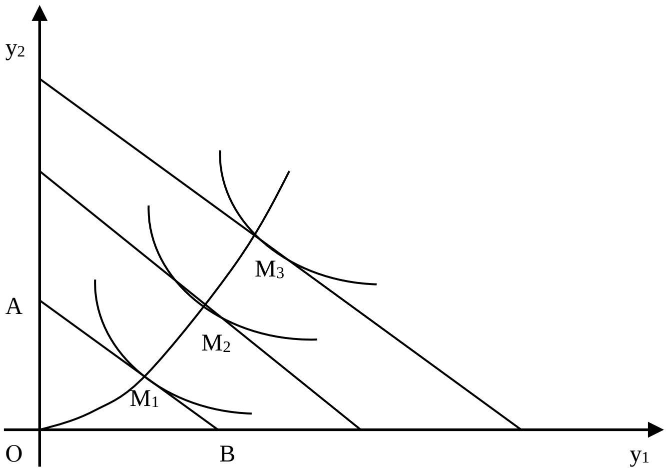

Рис. 5.3

Точками оптимума потребительского спроса для соответствующих размеров дохода будут в данном случае точки M_1, M_2, M_3. При нулевом доходе спрос на оба товара будет нулевым. Кривая, соединяющая точки O, M_1, M_2, M_3, является графическим отображением векторной функции спроса от дохода при заданном векторе цен.

Рассмотрим процесс аналитического построения функций спроса от дохода на основе модели (5.1) на конкретном условном примере. Пусть для двух товаров целевая функция потребления имеет вид $U(Y)=y_1y_2^3$; вектор цен равен $P = (3; 6)$; величина дохода равна Z. Так как в данном случае $U_1 = \dfrac{\partial U(Y)}{\partial y_1} = y_2^3$; $U_2 = \dfrac{\partial U(Y)}{\partial y_2} = 3y_1y_2^2$; $D=Z$, то необходимые условия оптимума (5.2) дают следующую систему уравнений (λ -множитель Лагранжа):

$$\begin{aligned} &y_2^3 = 3\lambda; \\ &3y_1y_2^2 = 6\lambda; \\ &3y_1 + 6y_2 = Z. \end{aligned}$$

После подстановки первого уравнения во второе получим $3y_1y_2^2= 2y_2^3$. Выразив из третьего уравнения $3y_1$ и подставив в последнее равенство, будем иметь: $(Z –$

$6y_2)$ $y_2^2 = 2y_2^3$, откуда можно получить, что $y_2 = 1/8\ Z$. Подставив этот результат в третье уравнение, получим: $y_1 = 1/12\ Z$. Таким образом, для данного примера функции спроса на товары y_1 и y_2 от дохода Z имеют вид:

$$y_1 = 1/12\ Z; \qquad y_2 = 1/8\ Z.$$

Однофакторные функции спроса от дохода широко применяются при анализе покупательского спроса. Соответствующие этим функциям кривые $y = \alpha \cdot x^{\beta}$, где y - представляет собой спрос, x - доход, β - эластичность спроса по доходу, называются кривыми Энгеля по имени изучавшего их немецкого экономиста. Формы этих кривых для различных товаров могут быть различны. Если спрос на данный товар возрастает примерно пропорционально доходу, то функция будет линейной, как в рассмотренном выше примере ($\beta = 1$). Такой характер имеет, например, спрос на одежду, фрукты и др. Кривая Энгеля для этого случая представлена на рис. 5.4, а.

Если по мере роста доходов спрос на данную группу товаров возрастает все более высокими темпами, то кривая Энгеля выпукла (рис. 5.4, б). Так изменяется спрос на предметы роскоши.

Если рост значений спроса, начиная с определенного момента, по мере насыщения спроса отстает от роста дохода, то кривая Энгеля имеет вид вогнутой кривой (рис. 5.4, в). Например, таков характер спроса на товары первой необходимости.

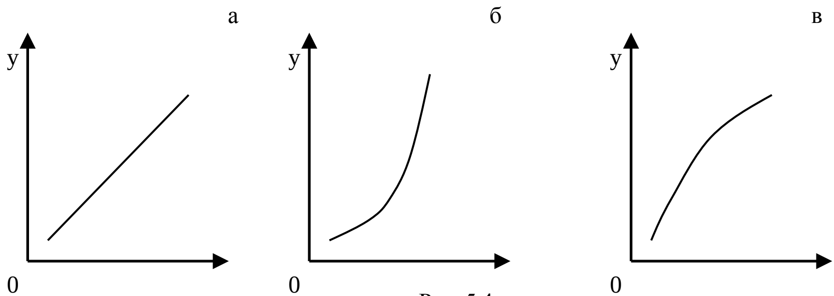

Рис. 5.4

Тот же принцип разграничения групп товаров по типам функций спроса от дохода использовал шведский экономист Д. Торнквист, который предложил специальные виды функций спроса (функции Торнквиста) для трех групп товаров: первой необходимости, второй необходимости, предметов роскоши.

Функция Торнквиста для товаров первой необходимости имеет вид:

$$y = \frac{a_1 \cdot Z}{Z + C_1}$$

и отражает тот факт, что рост спроса на эти первоочередные товары с ростом дохода постепенно замедляется и имеет предел a_1 (кривая спроса асимптотически приближается к прямой линии $y = a_1$); график функции является вогнутой кривой.

Функция спроса по Торнквисту на товары второй необходимости выражается формулой:

$$y = \frac{a_1 \cdot (Z - b_2)}{Z + C_2},$$

где $Z \geq b_2$.

Эта функция также имеет предел a_2, но более высокого уровня, при этом спрос на эту группу товаров появляется лишь после того, как доход достигнет величины b_2; график функции – вогнутая кривая.

Наконец, функция Торнквиста для предметов роскоши имеет вид:

$$y = \frac{a_3 \cdot (Z - b_3)}{Z + C_3},$$

где $Z \geq b_3$.

Эта функция не имеет предела. Спрос на эти товары возникает только после того, как доход превысит величину b_3, и далее быстро возрастает, так что график функции является выпуклой кривой.

Графики функций Торнквиста представлены на рис. 5.5.

Кроме указанных функций, в аналитических моделях покупательского спроса используются также другие функции: степенные, *s*-образные и т. д.

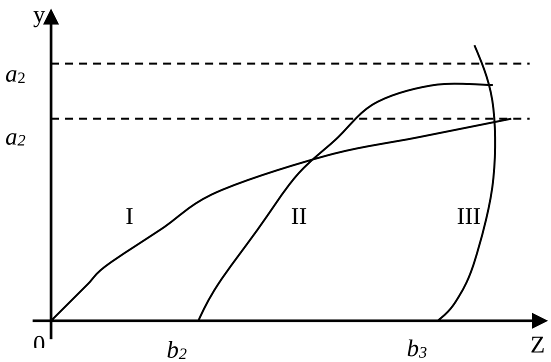

Рис. 5.5

Важную роль в анализе изменения спроса при небольших изменениях дохода играют коэффициенты эластичности. Коэффициент эластичности спроса от дохода показывает относительное изменение спроса при изменении дохода (при прочих неизменяющихся факторах). Этот коэффициент вычисляется по формуле:

$$Э_i^Z = \frac{dy_i}{dZ} \cdot \frac{Z}{y_i}, \tag{5.3}$$

где $Э_i^Z$ – коэффициент эластичности для *i*-го товара (группы товаров) по доходу *Z; y* – спрос на этот товар, являющийся функцией дохода: $y_i = f_i(Z)$. Например, если спрос на товар описывается функцией Торнквиста для товаров первой необходимости, то формула (5.3) дает следующее выражение для коэффициента эластичности спроса от дохода:

$$Э_i^Z = \frac{C_1}{Z + C_1}.$$

Во многих экономико-математических моделях эластичность функций относят к проценту прироста независимой переменной. Таким образом, коэффициент эластичности спроса от дохода показывает, на сколько процентов изменится спрос на товар при изменении дохода на один процент.

Коэффициенты эластичности спроса от дохода различны для разных товаров, они могут быть и отрицательны, когда с ростом доходов потребление уменьшается. Принято выделять четыре группы товаров в зависимости от коэффициента эластичности спроса на них от дохода: малоценные товары ($Э_i^Z<0$); товары с малой эластичностью ($0 < Э_i^Z < 1$); товары со средней эластичностью ($Э_i^Z$ близки к единице); товары с высокой эластичностью ($Э_i^Z>1$).

К малоценным товарам, т.е. товарам с отрицательной эластичностью спроса от дохода, относятся такие как хлеб, низкосортные товары. По результатам обследований коэффициенты эластичности для основных продуктов питания находятся в интервале от 0,4 до 0,8, по одежде, тканям, обуви – в интервале от 1,1 до 1,3 и т. д. По мере увеличения дохода спрос перемещается с товаров первой и второй групп на товары третьей и четвертой групп, при этом потребление товаров первой группы по абсолютным размерам сокращается.

Перейдем к рассмотрению и анализу функций покупательского спроса от цен на товары. Из модели поведения потребителей (5.1) следует, что спрос на каждый товар в общем случае зависит от цен на все товары (вектора P), однако построить функции общего вида $y_i = \varphi_i(P)$ очень сложно. Поэтому в практических исследованиях ограничиваются построением и анализом функций спроса для отдельных товаров в зависимости от изменения цен на этот же товар или группу взаимозаменяемых товаров: $y_i = \varphi_i(p_i)$.

Для большинства товаров действует зависимость: чем выше цена, тем ниже спрос, и наоборот. Здесь также возможны различные типы зависимости и, следовательно, разные формы кривых. В практических задачах маркетинга важно различать действительное увеличение спроса, когда сама кривая сдвигается вверх и вправо (происходит переход с кривой I на кривую II на рис. 5.6), и увеличение объема приобретаемых товаров в результате снижения цен при неизменной сумме затрат (переход от точки A к точке B по одной и той же кривой I на рис.5.6).

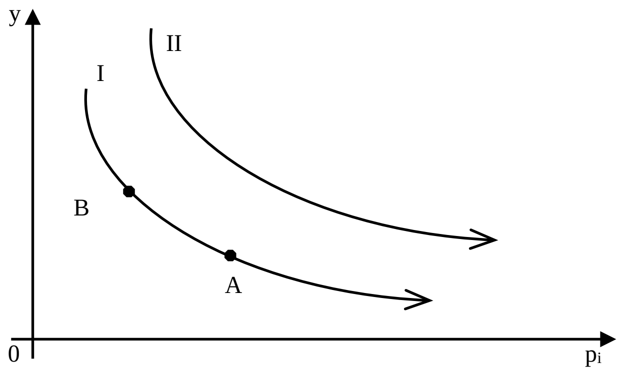

Рис. 5.6

Рассмотрим вопросы построения и использования в задачах маркетинга функций покупательского спроса от цены при неизменном доходе для конкретной группы товаров $y = \varphi(p)$ более подробно. Основным критерием функционирования предприятий и фирм, производящих тот или иной товар, является прибыль. Сформулируем экономико-математическую модель на максимум прибыли при указанной форме зависимости спроса от цены. Конечную прибыль Π можно представить в виде:

$$\Pi = p^* y - C(y), \tag{5.4}$$

где $C(y)$ – совокупные затраты на производство и реализацию продукции; при этом предполагается, что объем выпускаемой продукции целиком совпадает с объемом спроса y, т.е. отсутствуют дефицит и затоваривание продукции.

Если известен вид функции спроса от цены $y = \varphi(p)$, то подставив эту функцию в (5.4), получим:

$$П(p)=p * \varphi(p) - C(\varphi(p)). \tag{5.5}$$

Тогда оптимизационная задача ставится следующим образом: определить значение цены $p = p_0$, при котором прибыль достигает своего максимума max $П(p)$. В такой постановке эта задача решается классическими методами оптимизации. Вид функций $\varphi(p)$ и $C(\varphi(p))$, а также их параметры могут быть определены методами математической статистики в результате обработки соответствующих статистических данных.

Рассмотрим случай, когда функция издержек $C(y)$ является линейной и имеет вид:

$$C(y) = h + vy. \tag{5.6}$$

Здесь h есть постоянная величина затрат, не зависящая от объема выпуска продукции, т. е. h - это накладные расходы; величина v задает удельные затраты на единицу продукции. Будем считать, что зависимость спроса от цены также является линейной:

$$y = k + Эp, \tag{5.7}$$

где k характеризует максимально возможный объем спроса, а $Э$ представляет собой некоторую условную эластичность спроса от цены; очевидно, что $k > 0$, а $Э < 0$.

Подставляя (5.6) и (5.7) в выражение для прибыли (5.5), будем иметь:

$$\begin{aligned} П(p) &= p(k + Эp) - h - v(k + Эp) = Эp^2 + (k - vЭ)p - (h + vk) = \\ &= Э\left(p - \frac{vЭ - k}{2Э}\right)^2 - \frac{(vЭ - k)^2}{4Э} - h - vk. \end{aligned} \tag{5.8}$$

С учетом того, что $Э < 0$, можно сделать вывод о том, что максимум прибыли достигается при

$$p_0 = \frac{vЭ - k}{2E}, \tag{5.9}$$

и этот максимум равен:

$$\max П(p) = П(p_0) = \frac{(vЭ - k)^2 + (h + vk)4Э}{-4Э}. \qquad (5.10)$$

График функции (5.8) представляет собой параболу, ветви которой направлены вниз. С учетом требования рентабельности выпуска продукции *max П(p) > 0* этот график представлен на рис. 5.7.

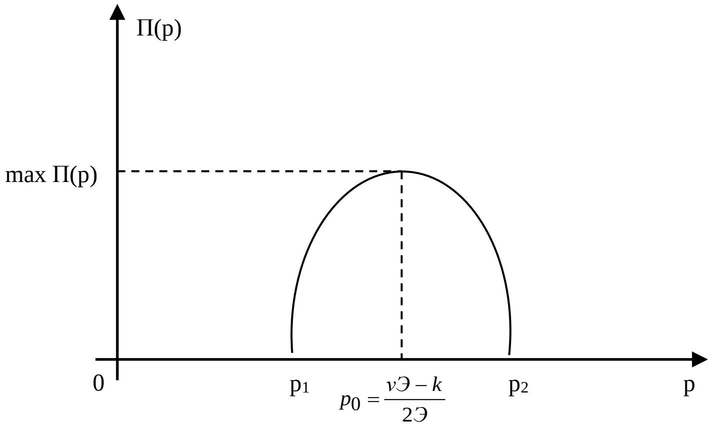

Рис.5.7

Условием того, что эта рентабельность может быть достигнута, является условие положительности дискриминанта квадратного трехчлена от *П(p)* (5.8):

$$(k - vЭ)^2 + 4Э(h + vk) > 0.$$

Из этого неравенства следует, что:

$$(k + vЭ)^2 > 4Эh,$$

вследствие чего условие рентабельности можно записать в виде:

$$k + vЭ > 2\sqrt{-Эh}. \qquad (5.11)$$

С учетом (5.9) оптимальный объем выпуска продукции будет равен:

$$y_0 = k + Эp_0 = \frac{vЭ + k}{2}; \quad (5.12)$$

в соответствии с этим требование рентабельности (6.11) может быть записано в виде:

$$y_0 > \sqrt{-Эh}. \quad (5.13)$$

Как видно из графика функции *П(р)* на рис. 5.7, существуют две «мертвые точки», p_1 и p_2, в которых прибыль равна нулю. Решение соответствующего уравнения дает для этих точек:

$$p_{1,2} = \frac{(vЭ - k) \pm \sqrt{(vЭ + k)^2 + 4Эh}}{2Э}. \quad (5.14)$$

Таким образом, если установление оптимальной цены затруднено, то цена в любом случае должна лежать в интервале $(p_1;p_2)$. Этим обеспечивается положительность величины прибыли от производства и реализации данного вида товара.

Рассмотрим числовой *пример* из области маркетинга книгоиздательства. Пусть зависимость объема спроса на книжную продукцию от цены имеет вид (5.7), а функция издержек представлена в виде (5.6). Зададим следующие условные значения величин, участвующих в этих зависимостях:

- накладные расходы на производство и реализацию книжной продукции h = 36 тыс. грн;
- удельные, затраты на единицу (один экземпляр) этой продукции v = 20 грн/экз.;
- максимально возможный объем тиража k - 4000 экз.;
- условная эластичность спроса от цены Э = -40 экз./грн.

Тогда требование к объему тиража для обеспечения рентабельности определяется условием (5.13):

$$y_0 > \sqrt{-(-40) \cdot 36000} = 1200 \text{ экз.}$$

Оптимальная цена задается формулой (5.9):

$$p_0 = \frac{20 \cdot (-40) - 4000}{2 \cdot (-40)} = 60 \text{грн / экз.}$$

Наиболее оптимальный объем тиража, обеспечивающий максимум прибыли, в соответствии с формулой (5.12) равен:

$$y_0 = \frac{20 \cdot (-40) + 4000}{2} = 1600 \text{ экз.}$$

Интервал для цены, в пределах которого обеспечивается рентабельность данного издания, определяется выражением (5.14):

$$p_{1,2} = 60 \pm \frac{\sqrt{(20(-40)+4000)^2 + 4(-40)36000}}{2(-40)} = 60 \pm 26{,}5 \text{ грн./ экз.}$$

Таким образом, цена должна лежать в пределах от 33,5 до 86,5 грн за один экземпляр.

Максимум прибыли, достигаемый при этом, рассчитывается в соответствии с формулой (5.10) и равен:

$$\max \Pi(p) = \frac{(20(-40)-4000)^2 + (36000 + 20 \cdot 4000)4(-40)}{-4 \cdot (-40)} = 28 \text{ тыс.грн.}$$

Представление зависимости спроса от цены в виде линейной функции (5.7) является весьма упрощенным, так как показатель эластичности спроса от цены здесь принимается равным постоянной величине Э. Более соответствует действительности предположение о зависимости коэффициента эластичности спроса от цены от величины самой цены. Проведенные конкретные исследования, учитывающие эту зависимость, позволяют с большой долей вероятности принять зависимость спроса y от цены p в виде одной из S-образных убывающих кривых, а именно в виде логистической кривой (функция Перла-Рида):

$$y = \frac{k}{1 + b \cdot e^{ap}}. \tag{5.15}$$

График этой функции представлен на рис. 5.8. Он имеет точку симметрии, совпадающую с точкой перегиба функции (5.15).

Тогда, предполагая зависимость затрат от спроса *C(y)* по-прежнему линейной в виде функции (5.6), получим выражение для прибыли:

$$\Pi(p) = p \cdot \frac{k}{1 + b \cdot e^{ap}} - h - v \cdot \frac{k}{1 + b \cdot e^{ap}} = \frac{k(p - v)}{1 + b \cdot e^{ap}} - h. \tag{5.16}$$

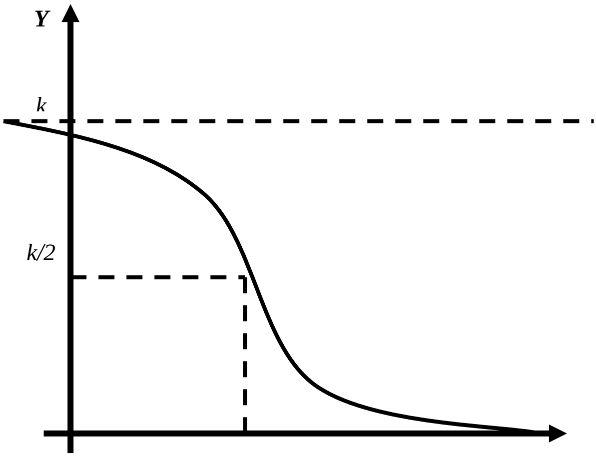

Рис. 5.8

Вычисляя производную этой функции по переменной p и приравнивая ее к нулю, получим уравнение для нахождения критических точек:

$$1+be^{ap} -(p-v)abe^{ap} =0.$$

Разделив обе части этого уравнения на $e^{ap}\neq 0$, получим:

$$e^{-ap} + b(av+1)=abp. \qquad (5.17)$$

Уравнение 5.17 имеет единственный корень p_0, так как кривые функций $y = abp$ и $y = e^{-ap} + b(av+1)$ имеют только одну точку пересечения (см. рис. 5.9). Трансцендентное уравнение (5.17) можно решить различными численными методами вычислительной математики. Решение этого уравнения p_0 можно оценить:

$$v+\frac{b}{a}< p_0 < v+\frac{b}{a}+\frac{1}{ab}. \qquad (5.18)$$

Легко показать, что вторая производная функции прибыли от цены (5.16) в точке $p = p_0$ отрицательна; отсюда следует, что точка p_0, действительно является точкой максимума.

Из *соотношения* (5.18) можно получить интервал для оптимального объема выпуска товара:

$$\frac{k}{1+b\cdot e^{av+b+\frac{1}{b}}} < y_0 < \frac{k}{1+b\cdot e^{av+b}}. \qquad (5.19)$$

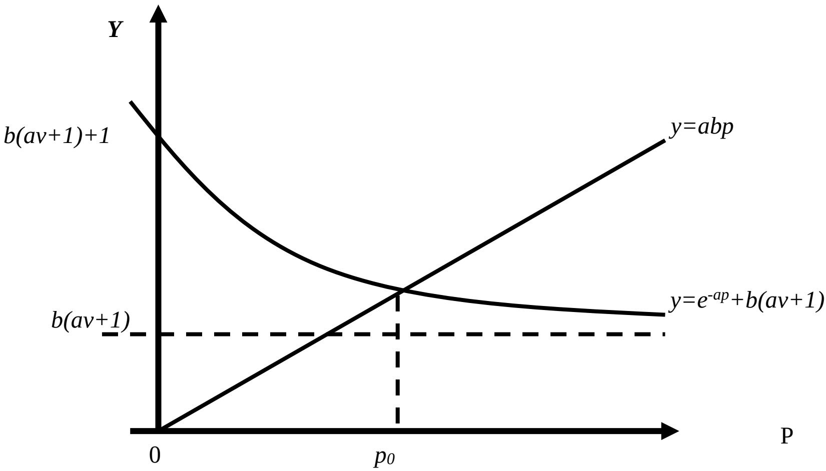

Рис. 5.9

Положительные значения параметров *a* и *b* логистической кривой (5.15), если *значение* асимптоты *k* известно, определяются путем предварительного преобразования и логарифмирования, после чего на основе метода наименьших квадратов составляется и решается система нормальных уравнений относительно логарифмов параметров, а затем находятся и сами параметры.

Если значение величины *k* (максимум выпуска) неизвестно, то для нахождения параметров *k, a* и *b* кривой (5.15) применяют приближенные методы: метод трех точек, метод трех сумм и др. Исходные данные для проведения указанных выше расчетов формируются на основе статистических наблюдений за процессом производства и реализации товарной продукции, осуществляемых службами маркетинга.

Как уже отмечалось, в общем случае спрос на отдельный товар при прочих равных условиях зависит от уровня цен всех товаров. Относительное изменение объема спроса при изменении цены данного товара или цен других связанных с ним товаров характеризует коэффициент эластичности спроса от цен. Этот коэффициент эластичности удобно трактовать как величину изменения спроса в процентах при изменении цены на один процент.

Для спроса y_i на i-й товар относительно его собственной цены p коэффициент эластичности исчисляется по формуле:

$$Э_{ii}^{p} = \frac{\partial y_i}{\partial p_i} \cdot \frac{y_i}{p_i}. \qquad (5.20)$$

Значения коэффициентов эластичности спроса от цен практически всегда отрицательны. Однако по абсолютным значениям этих коэффициентов товары могут существенно отличаться друг от друга. Их можно разделить на три группы:

товары с неэластичным спросом в отношении цены ($Э^{p}_{ii} > -1$);

товары со средней эластичностью спроса от цены ($Э^{p}_{ii}$ близко к-1);

товары с высокой эластичностью спроса ($Э^{p}_{ii} < -1$).

В товарах эластичного спроса повышение цены на один процент приводит к снижению спроса более чем на один процент, и наоборот, понижение цены на один процент приводит к росту покупок больше чем на один процент. Если повышение цены на один процент влечет за собой понижение спроса менее чем на один процент, то говорят, что это товар неэластичного спроса.

Рассмотрим, как влияет на спрос на какой-либо товар изменение цен на другие товары. Коэффициент, показывающий, на сколько процентов изменится спрос на данный товар при изменении на один процент цены на другой товар при условии, что другие цены и доходы покупателей остаются прежними, называется перекрестным коэффициентом эластичности. Для спроса y_i на i-й товар относительно цены p_j на j-й товар ($i \neq j$) перекрестный коэффициент эластичности рассчитывается по формуле:

$$Э_{ij}^{p} = \frac{\partial y_i}{\partial p_j} \cdot \frac{p_j}{y_i}. \qquad (5.21)$$

По знаку перекрестных коэффициентов эластичности товары можно разделить на взаимозаменяемые и взаимодополняемые. Если $Э_{ij}^{p} > 0$, это означает, что i-й товар заменяет в потреблении товар j, т. е. на товар i переключается спрос при увеличении цены на товар j. Примером взаимозаменяемых товаров могут служить многие продукты питания.

Если $Э_{ij}^{p} < 0$, это служит признаком того, что i-й товар в процессе потребления дополняет товар j, т. е. увеличение цены на товар j приводит к уменьшению спроса на товар i. В качестве примера можно привести такие взаимодополняемые товары, как автомобили и бензин.

В качестве иллюстрации в табл. 5.1 приведены значения прямых и перекрестных коэффициентов эластичности потребления от цен для некоторой категории семей. На основании этих данных по значениям прямых коэффициентов эластичности (по диагонали таблицы) можно сделать вывод, что продукты питания в целом являются малоэластичными по отношению к цене; одежда, ткани и обувь имеют среднюю эластичность; две последние группы товаров являются товарами с высокой эластичностью спроса по отношению к цене.

Таблица 5.1

Прямые и перекрестные коэффициенты эластичности

I *Группы товаров*	*Продукты питания*	*Одежда, ткани, обувь*	*Мебель, хоз. товары*	*Культтовары*
Продукты питания	-0,7296	0,0012	0.0043	0,0045
Одежда, ткани, обувь	-0,1991	-1,000	0,0071	0,0074
Мебель, хозтовары	-0,2458	0,0024	-1,2368	0,0092
Культтовары	-0,2494	0,0024	0,0089	-1,2542

На основании недиагональных элементов этой таблицы все промышленные товары (вторая, третья и четвертая группы) являются взаимозаменяемыми. Положительность перекрестных коэффициентов эластичности по строке «Продукты питания» означает, что повышение цен на промышленные товары увеличивает спрос на продукты питания (уменьшение спроса на промышленные товары освободит средства для продуктов питания). Отрицательность перекрестных коэффициентов эластичности по столбцу (графе) «Продукты питания» означает, что при росте цен на продукты питания спрос на промышленные товары сокращается (повышение цен на продукты питания уменьшает размер средств на приобретение других товаров).

5.3. Моделирование и прогнозирование покупательского спроса

Очевидно, что спрос во многом определяет стратегию и тактику организации производства и сбыта товаров и услуг и учет спроса, обоснованное прогнозирование его на краткосрочную и долгосрочную перспективу является одной из важнейших задач служб маркетинга различных организаций и фирм.

Состав и уровень спроса на тот или иной товар зависит от многих факторов, как экономических, так и естественных. К экономическим факторам относятся уровень производства (предложения) товаров и услуг (обозначим этот фактор в общем виде *П),* уровень денежных доходов отдельных групп населения (D), уровень и соотношение цен (P). К естественным факторам относятся демографический состав населения, в первую очередь размер и состав семьи (S), а также привычки и традиции, уровень культуры, природно-климатические условия и т. д.

Экономические факторы очень мобильны, особенно распределение населения по уровню денежных доходов. Естественные же факторы меняются сравнительно медленно и в течение небольшого периода (до 3-5 лет) не оказывают заметного влияния на спрос. Исключение составляет демографический состав населения. Поэтому в текущих и перспективных прогнозах спроса все естественные факторы, кроме демографических, целесообразно учитывать обобщенно, введя фактор под названием «время» (t).

Таким образом, в общем виде спрос определяется в виде функции перечисленных выше факторов:

$$y=f(\Pi,D,P,S,t). \qquad (5.22)$$

При этом, поскольку наибольшее влияние на спрос оказывает фактор дохода (есть даже выражение «Спрос всегда платежеспособен»), многие расчеты спроса и потребления осуществляются в виде функции от душевого денежного дохода: $y = f(D)$.

Наиболее простой подход к прогнозированию спроса на небольшой период времени связан с использованием так называемых структурных моделей спроса. Эти модели строят исходя из того, что для каждой экономической группы населения по статистическим бюджетным данным может быть рассчитана присущая ей экономическая структура потребления. При этом предполагается, что на изучаемом отрезке времени заметные изменения претерпевает лишь доход, а цены, размер семьи и прочие факторы принимаются неизменными. Изменение дохода, например его рост, можно рассматривать как перемещение определенного количества семей из низших доходных групп в высшие. Другими словами, изменяются частоты в различных интервалах дохода: они уменьшаются в нижних и увеличиваются в верхних интервалах. При этом семьи, которые попадают в новый интервал, будут иметь ту же структуру потребления и спроса, которая сложилась у семей с таким же доходом к настоящему времени.

Таким образом, структурные модели рассматривают спрос как функцию только распределения потребителей по уровню дохода. Имея данные о соответствующих структурах спроса, рассчитанных по данным статистики бюджетов, и о частотах распределения потребителей по уровню дохода, можно рассчитать общую структуру спроса. Если обозначить структуру спроса в группе семей со средним доходом D_i через $r(D_i)$, а частоты серией с доходом D_i, через $w(D_i)$, то общая структура спроса R может быть рассчитана по формуле:

$$R = \sum_{i=1}^{n} r(D_i) \cdot w(D_i), \qquad (5.23)$$

где n – количество интервалов доходов семей.

Структурные модели спроса являются одним из основных видов экономико-математических моделей планирования и прогнозирования спроса и потребления. В частности, широко распространены так называемые компаративные (т. е. сравнительные) структурные модели, в которых сопоставляются структуры спроса данного исследуемого объекта и некоторого аналогового объекта. Аналогом обычно считается регион или группа населения с оптимальными потребительскими характеристиками.

Наряду со структурными моделями в планировании и прогнозировании спроса используются *конструктивные модели спроса*. В основе таких моделей лежат уравнения бюджета населения, т. е. такие уравнения, которые выражают очевидное равенство общего денежного расхода (другими словами, объема потребления) и суммы произведений количества каждого потребленного товара на его цену. Если Z – объем потребления, m – количество разных видов благ, q_i – размер потребления i-го блага, p_i – цена i-го блага, то конструктивная модель спроса может быть записана следующим образом:

$$Z = \sum_{i=1}^{m} q_i \cdot p_i \,. \qquad (5.24)$$

Эти модели, называемые также моделями бюджетов потребителей, играют важную роль в планировании потребления. Одной из таких моделей является, например, всем известный прожиточный минимум. К таким моделям относятся рациональные бюджеты, основанные на научных нормах потребления, прежде всего продуктов питания, перспективные бюджеты (например, так называемый бюджет достатка) и другие.

В практике планирования и прогнозирования спроса, кроме структурных и конструктивных моделей, применяются *аналитические модели спроса и потребления,* которые строятся в виде уравнений, характеризующих зависимость потребления товаров и услуг от тех или иных факторов. Другими словами, в аналитических моделях функциональная зависимость (5.22) принимает вполне определенный вид. Такие модели могут быть однофакторными и многофакторными. Рассмотрим аналитические модели спроса на *примере* линейных корреляционно-регрессионных статических моделей, используя конкретные данные обследования семей.

В табл. 5.2 представлены статистические данные о расходах на питание, душевом доходе и размере семьи для девяти групп семей.

Таблица 5.2

Статистические данные о расходах на питание, душевом доходе и размере семьи для девяти групп семей

№ группы	Расход на питание (V)	Душевой доход (xj)	Размер семей (x_2)
1	433	628	1,5
2	616	1577	2,1
3	900	2659	2,7
4	1113	3701	3,2
5	1305	4796	3,4
6	1488	5926	3,6
7	1645	7281	3,7
8	1914	9350	4,0
9	2411	18807	3,7

Рассмотрим сначала однофакторную линейную модель зависимости расходов на питание *(y)* от величины душевого дохода семей *(x_1)*. Она выражается линейной функцией вида

$$\hat{y}=a_0 + a_i x_i \,, \tag{5.25}$$

параметры которой a_0 и a_i находятся в результате решения системы нормальных уравнений, которая в свою очередь формируется с применением метода наименьших квадратов. Система нормальных уравнений для рассматриваемого случая имеет вид:

$$\begin{cases} na_0 + (\sum x_1)a_1 = \sum y; \\ (\sum x_1)a_0 + (\sum x_1^2)a_1 = \sum y \cdot x_1, \end{cases} \tag{5.26}$$

где суммирование проводится по всем n группам. Используя данные табл. 5.2, получим систему уравнений:

$$9a_0+54\,725\,a_1=11\,825;$$
$$54725a_0 +540\,789\,321\,a_1 =98\,049\,159,$$

решением которой являются значения a_0 = 549,68; a_1 = 0,1257. Таким образом, модель имеет вид:

$$\hat{y} = 549{,}68 +0{,}1257x_1. \tag{5.27}$$

Уравнение (5.27) называется уравнением регрессии, коэффициент a_1 называется коэффициентом регрессии. Направление связи между y и x_1 определяет знак коэффициента регрессии a_1: в нашем случае данная связь является прямой. Теснота этой связи определяется коэффициентом корреляции:

$$r_{\hat{y}x_1} = \sqrt{1-\frac{S^2_{\hat{y}x_1}}{S^2_y}}\,, \tag{5.28}$$

где $S_y = \sqrt{\frac{\sum(y-\bar{y})^2}{n}}$, где $\bar{y}$ – средняя арифметическая значений y, а $S_{\hat{y}x}$– средняя квадратическая ошибка нашего уравнения (5.27):

$$S_{\hat{y}x_1} = \sqrt{\frac{\sum(y-\hat{y})^2}{n-2}}\,,$$

где $\hat{y}$ есть соответствующее значение, вычисленное по модели (5.27). В этих формулах, как и ранее, суммирование ведется по всем группам.

Чем ближе значение коэффициента корреляции к единице, тем теснее корреляционная связь. В нашем примере S_y^2 = 454 070, $S_{\hat{y}x}^2$ = 63846, следовательно,

$$r_{\hat{y}x_1} = \sqrt{1-\frac{63846}{454070}} = 0{,}927.$$

Полученное значение $r_{\hat{y}x_1}$ свидетельствует, что связь между расходами на питание и душевым доходом очень тесная.

Величина $r_{\hat{y}x_1}$ называется коэффициентом детерминации и показывает долю изменения (вариации) результативного признака под действием факторного признака. В нашем случае $r_{\hat{y}x_1}$ = 0,859; это означает, что фактором душевого дохода можно объяснить почти 86 % изменения расходов на питание.

Рассмотрим теперь двухфакторную линейную модель зависимости расходов на питание (y) от величины душевого дохода семей (x_1) и размера семей (x_2). Множественный (многофакторный) корреляционно-регрессивный анализ решает три задачи: определяет форму связи результативного признака с факторными, выявляет тесноту этой связи и устанавливает влияние отдельных факторов. В нашем случае эта модель имеет вид:

$$\hat{y}=a_0 + a_1x_1+ a_2x_2. \tag{5.29}$$

Параметры модели a_0, a_1 и a_2 находятся путем решения системы нормальных уравнений:

$$\begin{cases} na_0+(\sum x_1)a_1+(\sum x_2)a_2=\sum y \\ (\sum x_1)a_0+(\sum x_1^2)a_1+(\sum x_1x_2)a_2=\sum y\cdot x_1\ , \\ (\sum x_2)a_0+(\sum x_1x_2)a_1+(\sum x_2^2)a_2=\sum y\cdot x_2 . \end{cases} \tag{5.30}$$

Используя данные табл. 5.2, получим систему нормальных уравнений в виде:

$$\begin{cases} 9a_0+54725a_1+27.9a_2=11825; \\ 4725a_0+540789321a_1+194341.8a_2=98049159; \\ 27.9a_0+194341.8a_1+92.1a_2=40391.7. \end{cases}$$

Решая эту систему (например, методом Гаусса), получим: a_0 = 18,63; a_1= 0,0985; a_2 = 224,6, так что модель (5.29) имеет вид:

$$\hat{y} = 18{,}63+ 0{,}0985x_1 + 224{,}6x_2.$$

Для определения тесноты связи предварительно вычисляются парные коэффициенты корреляции r_{yx_1}, r_{yx_2}, $r_{x_1x_1}$. Например,

$$r_{yx_1} = \frac{\overline{yx_1} - \bar{y} \cdot \bar{x}_1}{S_y \cdot S_{x_1}}, \tag{5.31}$$

где черта над символами означает среднюю арифметическую, а и S_y и S_{x_1} – средние квадратические ошибки соответствующих выборок из табл.5.2:

$$S_y = \sqrt{\frac{\sum (y - \bar{y})^2}{n}}; \quad S_{x_1} = \sqrt{\frac{\sum (x_1 - \bar{x}_1)^2}{n}}.$$

Аналогичный вид имеют формулы для r_{yx_2} и $r_{x_1x_2}$.

После этого вычисляется коэффициент множественной корреляции:

$$R_{\hat{y}x_1x_2} = \sqrt{\frac{r_{yx_1}^2 + r_{yx_2}^2 - 2r_{yx_1} \cdot r_{yx_2} \cdot r_{x_1x_2}}{1 - r_{x_1x_2}^2}}, \tag{5.32}$$

который колеблется в пределах от 0 до 1; чем ближе он к единице, тем в большей степени учтены факторы, влияющие на результативный признак.

В нашем примере расчеты дают следующие значения коэффициента множественной корреляции:

$$R_{\hat{y}x_1x_2} = 0.983,$$

что выше значения коэффициента корреляции в случае однофакторной модели. Таким образом, связь расходов на питание с факторами душевого дохода и размера семей является очень высокой.

Величина $R^2{}_{\hat{y}x_1x_2}$ называется совокупным коэффициентом детерминации и показывает долю вариации результативного признака под воздействием изучаемых факторных признаков. В нашем примере $R^2{}_{\hat{y}x_1x_2} = 0.966$; это означает, что совместное влияние душевого дохода и размера семей объясняет почти 97% изменения расходов на питание.

Задача анализа тесноты связи между результативным и одним из факторных признаков при неизменных значениях других факторов решается в многофакторных моделях при помощи частных коэффициентов корреляции. Так, частный коэффициент корреляции между результативным признаком у и факторным признаком x_1 при неизменном значении факторного признака x_2 рассчитывается по формуле:

$$r_{yx_1(x_2)} = \frac{r_{yx_1} - r_{yx_2} \cdot r_{x_1x_2}}{\sqrt{(1 - r_{yx_2}^2)(1 - r_{x_1x_2}^2)}}, \tag{5.33}$$

где используются парные коэффициенты корреляции, рассчитываемые по формулам, аналогичным (5.31). Аналогичная формула имеет место для частного коэффициента корреляции $r_{yx_1(x_2)}$ между результативным признаком y и факторным признаком x_2 при неизменном значении факторного признака x_1.

Для рассматриваемого примера частные коэффициенты корреляции расходов на питание от душевого дохода и размера семей составляют:

$$r_{yx_1(x_2)} = 0.927; \quad r_{yx_1(x_2)} = 0.849,$$

т. е. теснота связи между расходами на питание и одним из исследуемых факторов при неизменном значении другого весьма велика.

Если частные коэффициенты корреляции возвести в квадрат, то получим частные коэффициенты детерминации, показывающие долю вариации результативного признака под действием одного из факторов при неизменном значении другого фактора. В нашей задаче

$$r_{yx_1(x_2)}^2 = 0{,}859; \quad r_{yx_2(x_1)}^2 = 0{,}721 \cdot$$

Следовательно, влиянием душевого дохода при неизменном размере семьи объясняется почти 86% изменения расходов на питание, а изменение размера семьи при неизменном душевом доходе объясняет более 72% изменения расходов на питание.

Влияние отдельных факторов в многофакторных моделях может быть охарактеризовано с помощью частных коэффициентов эластичности, которые в случае линейной двухфакторной модели (5.29) рассчитываются по формулам:

$$Э_{yx_1(x_2)} = \frac{a_1 \cdot \bar{x}_1}{\bar{y}}; \quad Э_{yx_2(x_1)} = \frac{a_2 \cdot \bar{x}_2}{\bar{y}}. \tag{5.34}$$

Черта над символом, как и ранее, означает среднюю арифметическую. Частные коэффициенты эластичности показывают, на сколько процентов изменится результативный признак, если значение одного из факторных признаков изменится на один процент, а значение другого факторного признака останется неизменным.

В рассматриваемом примере

$$a_1 = 0{,}0985;\ a_2 = 224{,}6;\ \overline{y} = 1313{,}9;\ \overline{x_1} = 6080{,}6;\ \overline{x_2} = 3{,}1,$$

следовательно, по формулам (5.18) получим:

$$Э_{yx_1(x_2)} = \frac{0{,}0985 \cdot 6080{,}6}{1313{,}9} = 0{,}456;$$

$$Э_{yx_2(x_1)} = \frac{224{,}6 \cdot 3{,}1}{1313{,}9} = 0{,}530.$$

Это означает, что при увеличении душевого дохода на один процент и неизменном размере семьи расходы на питание увеличатся на 0,456 процента, а увеличение (условное) на один процент размера семьи при неизменном душевом доходе приведет к возрастанию расходов на питание на 0,530 процента.

Вопросы и задания для самопроверки

1. Назовите основные понятия целевой функции потребления и кривой безразличия.
2. Что такое бюджетная линия? Как она связана с кривой безразличия?
3. В чем суть процесса построения функций спроса от дохода и от цены?
4. Укажите наиболее характерные типы кривых Энгеля для различных групп товаров.
5. Поясните характерные свойства функций спроса Торнквиста для товаров первой и второй необходимости, предметов роскоши.
6. Каков экономический смысл коэффициентов эластичности спроса от дохода, спроса от цен, перекрестных коэффициентов эластичности?
7. Назовите особенности построения структурных и конструктивных моделей спроса.
8. Опишите построение аналитических моделей спроса и потребления на основе корреляционно-регрессионного анализа.

9. Объясните, как вы понимаете выражение «Спрос всегда платежеспособен»?

10.В чем суть коэффициента корреляции, и в чем его отличие от коэффициента детерминации?

11.Какие задачи решает множественный корреляционно-регрессионный анализ?

12.Для чего в многофакторных моделях используются частные коэффициенты эластичности?

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Построить многофакторную регрессионную модель. Доказать надежность полученного уравнения регрессии, произвести прогнозирование выходного показателя при заданных условиях. Рассчитать частные коэффициенты эластичности и дать им экономическую интерппритацию.

Вариант 1

Цена нефти	Добыча нефти	Цена газа	Спрос на нефть	Количество нефти в госрезерве
У	Х1	Х2	Х3	Х4
30	950	150	1000	4300
35	1000	170	1200	5000
23	950	125	800	4500
29	900	150	950	4100
24	830	145	1000	3500
38	1100	170	1400	5500
51	1400	230	1700	6500
37	1300	195	1300	5300
56	1550	250	1900	8000
48	1500	220	2000	7000
53	1500	260	?	8000

Вариант 2

Цена пшеницы	Сбор пшеницы	Цена ржи	Спрос на пшеницу	Количество пшеницы в госрезерве
У	Х1	Х2	Х3	Х4
84,33	71,96	73,76	41,68	90,28
82,09	66,21	66,36	41,68	82,88
80,51	69,01	64,13	50,39	87,55
83,12	69,64	56,88	56,79	85,62
81,05	66,03	52,68	61,47	79,22
83,51	70,19	51,08	64,67	77,85
79,61	67,19	43,24	74,05	75,76
83,31	69,30	40,68	75,42	75,58
76,35	68,40	36,55	77,44	72,91
77,60	65,30	32,73	88,69	74,72
78,96	65,00	38,01	?	77,00

Вариант 3

Цена изделия	Спрос на изделие	Затраты на производство	Объем выпуска	Цена конкурентов
У	Х1	Х2	Х3	Х4
96,54	101,11	14,02	67,48	12,91
96,97	105,33	15,55	60,79	14,31
101,61	108,25	16,47	58,87	15,78
104,3	102,65	16,81	56,44	18,19
109,24	108,72	17,83	55,24	20,51
109,09	110,32	20,35	54,49	23,13
111,7	107,98	20,41	53,84	23,57
113,57	119,9	21,79	50,39	27,45
109,34	118,36	22,18	47,81	27,36
111,42	122,23	23,95	45,36	31,23
113,54	?	24,05	48,00	31,25

Вариант 4

Объем продаж мороженого	Температура воздуха	Цена мороженого	Средняя заработная плата	Плотность населения
У	Х1	Х2	Х3	Х4
7125	30	140	700	2800
6529	29	130	500	2600
4890	22	110	500	1900
7863	32	120	650	3100
2587	23	100	400	2500
6597	27	140	550	2600
5689	25	100	600	2300
9534	37	160	900	3800
7569	33	150	800	3000
7459	32	140	850	3000
?	28	141	865	2956

Вариант 5

Годы	Коэффициент преступ-ности	Посещение куль-турно-массовых заведений за год, млн.			Введение в эксплуата-цию жилых домов (тыс.кв.м.)	Количество помещений для физкультурно-оздоровительных заня-тий	Количество дошкольных учреждений, тыс.	Количество студентов, тыс.
		Театры	Кинотеатры	Музеи				
1990	904	17,6	552	31,8	819	807	24,5	881,3
1991	980	15,0	416	20,8	750	800	24,4	876,2
1992	1200	15,1	211	16,3	620	780	23,8	855,9
1993	1430	12,4	127	18,0	500	773	23,2	829,2
1994	1696	10,2	56	18,2	412	740	22,3	888,5
1995	1805	8,3	36	17,4	306	731	21,4	922,8
1996	1720	6,9	14	16,5	280	760	20,2	976,9
1997	1600	5,6	7	14,9	260	820	18,4	1110,0
1998	1534	5,6	5	14,8	225	860	17,6	1210,3
1999	1508	5,6	5	15,0	199	880	17,2	1285,3
2000	1482	5,7	6	16,0	150	943	16,3	1402,9
2001	?	5,7	8	16,1	140	960	15,0	1486,3

Вариант 6

Годы	Количество новорожденных, на 1000 населения	Количество умерших, на 1000 населения	Количество дошкольных учреждений, тыс.	Среднемесячные денежные доходы на душу населения, грн	Количество абортов, единиц на 1000 женщин	Зарегистрировано разводов	Зарегистрировано браков
1990	11,5	12,2	24,5	181,7	62453	11874	26494
1991	10,6	13,0	24,4	100,5	58456	11966	26300
1992	10,0	13,2	23,8	91,4	52681	12000	25871
1993	8,2	14,9	23,2	62,1	51789	12111	24657
1994	8,0	15,7	22,3	50,9	50123	12180	23851
1995	7,8	16,8	21,4	45,2	48783	12197	22300
1996	7,2	16,3	20,2	60,1	45367	11956	18523
1997	7,0	16,0	18,4	69,8	40654	11121	16890
1998	6,6	15,5	17,6	77,4	38065	10968	15020
1999	6,1	16,7	17,2	91,9	34278	10761	17533
2000	5,7	17,0	16,3	113,3	28941	10230	19247
2001	?	17,5	15,0	115,0	30008	11256	17485

Вариант 7

Года	Среднемесячные денежные доходы на душу населения, грн	Коэффициент преступности (количество зарегистрированных преступлений на 100000 населения)	Численность населения, тыс. человек	Выпуск	Потребление	Количество предприятий	Внешнеторговый оборот, млн дол
1990	181,7	904	3013,5	7062,8	4565,4	2613	699,4
1991	100,5	980	2871,1	7282,4	4611,2	2698	712,2
1992	91,4	1200	2832,8	7310,3	4695,8	2765	786,9
1993	62,1	1430	2811,9	7398,7	4715,4	2895	823,5
1994	50,9	1696	2800,1	7432,1	4890,5	2974	900,8
1995	45,2	1805	2793,7	7588,2	4936,2	3055	929,0
1996	60,1	1720	2788,5	9467,1	6002,8	3245	920,1
1997	69,8	1600	2732,6	10953,3	7169,5	3499	857,4
1998	77,4	1534	2691,4	11166,3	7300,1	3641	806,5
1999	91,9	1508	2673,8	11295,4	7452,3	2406	765,8
2000	113,3	1482	2643,0	12342,6	7612,7	2398	798,2
2001	115,0	1500	2589,3	13457,2	?	2256	801,2

Вариант 8

Оценщик имеет следующие данные о характеристиках одиннадцати зданий (в одном районе города), арендуемых или покупаемых фирмой. Необходимо найти наилучшую модель для оценки 12-го здания.

№	Общая площадь, (кв.м)	Количество офисов	Количество входов	Срок эксплуатации (год)	Стоимость (у.е.)
1	2310	2	2	20	142000
2	2333	2	2	12	144000
3	2356	3	1,5	33	151000
4	2379	3	2	43	150000
5	2402	2	3	53	139000

6	2425	4	2	23	169000
7	2448	2	1,5	99	126000
8	2471	2	2	34	142900
9	2494	3	3	23	163000
10	2517	4	4	55	169000
11	2540	2	3	22	149000
12	2500	3	2	25	?

Вариант 9

Спрос	Факторы		
	цена	цена конкурентов	доход потребителей
5,0	0,75	0,70	490
10,3	1,05	1,00	820
9,6	1,15	1,20	850
7,5	0,95	1,00	830
6,5	1,25	1,10	470
9,7	0,85	0,90	1000
6,2	1,15	1,20	350
10,9	0,75	0,70	820
5,2	1,00	0,95	670
7,0	0,85	0,90	650
5,5	0,95	0,95	840
6,1	1,15	1,10	940
8,7	1,40	1,45	990
11,6	0,90	0,65	1200
4,5	1,00	1,05	880
9,6	0,80	1,80	980
?	0,94	0,98	1050

6. МОДЕЛИ СЕТЕВОГО ПЛАНИРОВАНИЯ И УПРАВЛЕНИЯ

6.1. Назначение и области применения сетевого планирования и управления

Исходя из функции маркетинга (организации производственного процесса) поиски более эффективных способов планирования сложных процессов привели к созданию принципиально новых методов сетевого планирования и управления (СПУ).

Система методов СПУ – система методов планирования и управления разработкой крупных народнохозяйственных комплексов, научными исследованиями, конструкторской и технологической подготовкой производства, новых видов изделий, строительством и реконструкцией, капитальным ремонтом основных фондов путем применения сетевых графиков.

СПУ основано на моделировании процесса с помощью сетевого графика и представляет собой совокупность расчетных методов, организационных и контрольных мероприятий по планированию и управлению комплексом работ.

Система СПУ позволяет:

• формировать календарный план реализации некоторого комплекса работ;

• выявлять и мобилизовывать резервы времени, трудовые, материальные и денежные ресурсы;

• осуществлять управление комплексом работ по принципу "ведущего звена" с прогнозированием и предупреждением возможных срывов в ходе работ;

• повышать эффективность управления в целом при четком распределении ответственности между руководителями разных уровней и исполнителями работ.

Для того чтобы составить план работ по осуществлению больших и сложных проектов, состоящих из тысяч отдельных исследований и операций, необходимо описать его с помощью некоторой математической модели. Таким средством описания проектов (комплексов) является *сетевая модель.*

6.2. Сетевая модель и ее основные элементы

Сетевая модель представляет собой план выполнения некоторого комплекса взаимосвязанных работ (операций), заданного в специфической форме сети, графическое изображение которой называется *сетевым графиком.* Отличительной особенностью сетевой модели является четкое определение всех временных взаимосвязей предстоящих работ.

Главными элементами сетевой модели являются *события* и *работы.*

Работа – протяженный во времени процесс, требующий затрат ресурсов (например, сборка изделия, испытание прибора и т.п.). Каждая действительная работа должна быть конкретной, четко описанной и иметь ответственного исполнителя.

Событие — это момент завершения какого-либо процесса, отражающий отдельный этап выполнения проекта. Событие может являться частным результатом отдельной работы или суммарным результатом нескольких работ. Событие может свершиться только тогда, когда закончатся все работы, ему предшествующие. Последующие работы могут начаться только тогда, когда событие свершится. Отсюда *двойственный* характер события: для всех непосредственно предшествующих ему работ оно является конечным, а для всех непосредственно следующих за ним — начальным. При этом *предполагается, что событие не имеет продолжительности и свершается как бы мгновенно.* Поэтому каждое событие, включаемое в сетевую модель, должно быть полно, точно и всесторонне определено, его формулировка должна включать в себя результат всех непосредственно предшествующих ему работ.

Среди событий сетевой модели выделяют *исходное* и *завершающее* события. Исходное событие не имеет предшествующих работ и событий, относящихся к представленному в модели комплексу работ. Завершающее событие не имеет последующих работ и событий.

События на сетевом графике (или, как еще говорят, *на графе)* изображаются кружками (вершинами графа), а работы — стрелками (ориентированными дугами), показывающими связь между работами. Пример фраг-

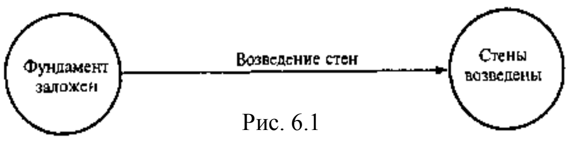

Рис. 6.1

мента сетевого графика представлен на рис. 6.1.

6.3. Упорядочение сетевого графика. Понятие о пути

Предположим, что при составлении некоторого проекта выделено 12 событий: *0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11* и 24 связывающие их работы: *(0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 2), (1, 4),* (1, *5), (2, 3), (2, 5), (2, 7), (3, 6), (3, 7), (3, 10), (4, 8), (5, 8), (5, 7), (6, 10), (7, 6), (7, 8), (7, 9), (7, 10), (8, 9), (9, 11), (10, 9), (10, 11).*

Необходимо составить и упорядочить сетевой график.Как следует из перечня работ, исходным событием сетевого графика является событие *0 (*ему не предшествуют никакие работы), а завершающим — событие 11 (за ним не следует ни одна работа). Полагая на сетевых графиках изменение времени слева направо, поместим событие *0* в левую часть графика, а событие 11 — в правую часть, разместив между ними промежуточные события в некотором порядке, соответствующем их номерам (рис. 6.2). События свяжем работами-стрелками в соответствии с перечнем работ.

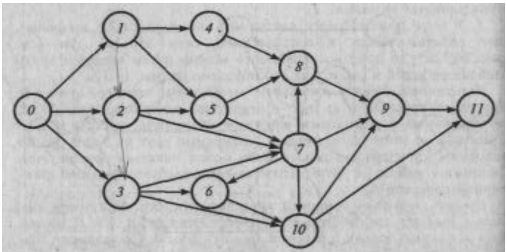

Рис. 6.2

Построенный сетевой график удовлетворяет правилам, предъявляемым к его построению. Однако этот график не полностью упорядочен.

Упорядочение сетевого графика заключается в таком расположении событий и работ, при котором для любой работы предшествующее ей событие расположено левее и имеет меньший номер по сравнению с завершающим эту работу событием. Другими словами, в упорядоченном сетевом графике все работы-стрелки направлены слева направо: от событий с меньшими номерами к событиям с большими номерами.

Разобьем условно сетевой график на несколько вертикальных слоев (обводим их пунктирными линиями и обозначаем римскими цифрами).

Поместив в I слое начальное событие *0* (рис. 6.3), мысленно вычеркнем из графика (см. рис. 6.2) это событие и все выходящие из него работы-стрелки. Тогда без входящих стрелок останется событие *I,* образующее II слой. Вычеркнув мысленно событие *1* и все выходящие из него работы, увидим, что без входящих стрелок остаются события *4* и *2,* которые образуют III слой. Продолжая указанную процедуру вычеркивания, получим IV слой с событиями 5 и *3, V* слой — с событием 7, VI слой—с событиями *8* и *6,* VII слой — с событием *10,* VIII слой—с событием *9* и, наконец, IX слой — с событием 11.

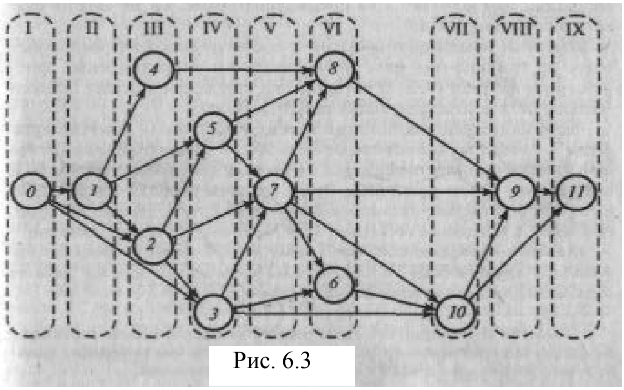

Рис. 6.3

Теперь видим, что первоначальная нумерация событий не совсем правильная: так, событие *6* лежит в VI слое и имеет номер, меньший, чем событие 7 из предыдущего слоя. То же можно сказать о событиях *9* и *10*. Изменим нумерацию событий в соответствии с их расположением на графике (см. рис. 6.3) и получим упорядоченный сетевой график (рис. 6.4), в котором над стрелками указана продолжительность соответствующих работ (в сутках).

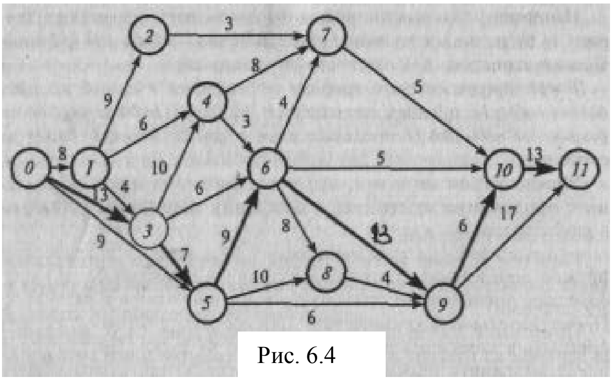

Рис. 6.4

Одно из важнейших понятий сетевого графика — понятие пути. *Путь — любая последовательность работ, в которой конечное событие каждой работы совпадает с начальным событием следующей за ней работы.* Среди различных путей сетевого графика наибольший интерес представляет *полный путь L* — любой путь, начало которого совпадает с исходным событием сети, а конец — с завершающим.

Наиболее продолжительный полный путь в сетевом графике называется критическим. Критическими называются также работы и события, расположенные на этом пути.

Критический путь имеет особое значение в системе СПУ, так как работы этого пути определяют общий цикл завершения всего комплекса работ, планируемых при помощи сетевого графика. И для сокращения продолжительности проекта необходимо в первую очередь сокращать продолжительность работ, лежащих на критическом пути.

Следует отметить, что классический вид сетевого графика — это сеть, вычерченная без масштаба времени. Поэтому сетевой график хотя и дает четкое представление о порядке следования работ, но недостаточно нагляден для определения тех работ, которые должны выполняться в каждый данный момент времени. В связи с этим небольшой проект после упорядочения сетевого графика рекомендуется дополнить линейной диаграммой проекта.

Такая линейная диаграмма для рассматриваемой сети показана на рис.6.5.

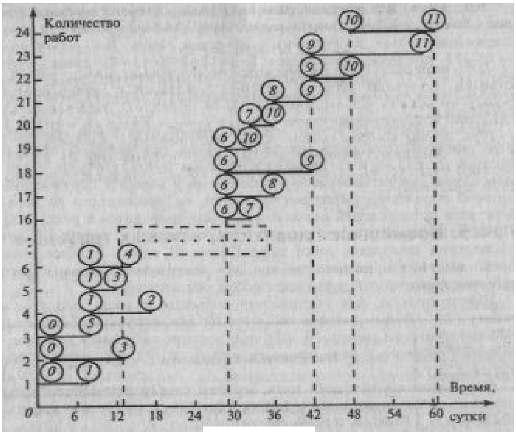

Рис. 6.5

При построении линейной диаграммы каждая работа изображается параллельным оси времени отрезком, длина которого равна продолжительности этой работы. При наличии фиктивной работы нулевой продолжительности (в рассматриваемой сети ее нет) она изображается точкой. События *i* и *j*, начало и конец работы *(i, j)* помещают соответственно в начале и конце отрезка. Отрезки располагают один над другим, снизу вверх в порядке возрастания индекса i, а при одном и том же *i* – в порядке возрастания индекса *j* (на рис. 6.6 вследствие ограниченности места не показаны работы-отрезки, выходящие из 2-, 3-, 4- и 5-го событий).

По линейной диаграмме проекта можно определить критическое время, критический путь, а также резервы времени всех работ (см. об этом в следующем разделе).

Так, критическое время комплекса работ равно координате на оси времени самого правого конца всех отрезков диаграммы:

$$t_{кр} = t(11) = 61 \text{ (сутки)}.$$

Для определения критического пути рассматриваем работы-отрезки, конечные события которых совпадают с завершающим событием сети (в нашем примере *(9, 11)* и *(10, 11)*). Затем находим отрезок (*9, 10)*, правый конец которого лежит на одной вертикали *t (10)* с левым концом одного из рассматриваемых ранее отрезков *(10, 11)*. Аналогично определяем и другие работы-отрезки критического пути: *(6, 9), ..., (0, 3)*.

6.4. Временные параметры сетевых графиков

В табл. 6.1 приведены основные временные параметры сетевых графиков.

Таблица 6.1

Элемент сети, характеризуемый параметром	Наименование параметра	Условное обозначение параметра
Событие *i*	Ранний срок свершения события Поздний срок свершения события Резерв времени события	$t_р(i)$ $t_п(i)$ $R(i)$
Работа *(i, j)*	Продолжительность работы Ранний срок начала работы Ранний срок окончания работы Поздний срок начала работы Поздний срок окончания работы	$t(i,j)$ $t_{рн}(i, j)$ $t_{ро}(i, j)$ $t_{пн}(i, j)$ $t_{по}(i, j)$

	Полный резерв времени работы Частный резерв времени работы первого вида Частный резерв времени работы второго вида или свободный резерв времени работы Независимый резерв времени работы	$R_П(i, j)$ $R_1(i, j)$ $R_c(i, j)$ $R_Н(i, j)$
Путь L	Продолжительность пути Продолжительность критического пути Резерв времени пути	$t(L)$ $t_{кр}$ $R(L)$

Рассмотрим содержание и расчет указанных параметров.

Начнем с **параметров событий.** Как уже отмечалось, событие не может наступить прежде, чем свершатся все предшествующие работы. Поэтому *ранний (или ожидаемый) срок $t_p(i)$ свершения i-го события определяется продолжительностью максимального пути, предшествующего этому событию:*

$$t_p(i) = \max_{L_{Пi}} t(L_{Пi}) \,, \tag{6.1}$$

где $L_{Пi}$ — любой путь, предшествующий i-му событию, т.е. путь от исходного до i-го события сети.

Если событие i имеет несколько предшествующих путей, а следовательно, несколько предшествующих событий j, то ранний срок свершения события i удобно находить по формуле:

$$t_p(i) = \max_{i,j}[t_p(i) + t(i, j)] \,. \tag{6.2}$$

Задержка свершения события i по отношению к своему раннему сроку не отразится на сроке свершения завершающего события (а значит, и на сроке выполнения комплекса работ) до тех пор, пока сумма срока свершения этого события и продолжительности (длины) максимального из последующих за ним путей не превысит длины критического пути.

Поэтому *поздний (или предельный) срок $t_П(i)$ свершения i-го события равен:*

$$t_П(i) = t_{кр} - \max_{L_{Ci}} t(L_{Ci}) \,, \tag{6.3}$$

где L_{ci} — любой путь, следующий за *i-м* событием, т.е. путь от *i*-го до завершающего события сети.

Если событие *i* имеет несколько последующих путей, а, следовательно, несколько последующих событий *j,* то поздний срок свершения события *i* удобно находить по формуле:

$$t_П(i) = \min_{i,j}[t_П(j) - t(i,j)]\,. \tag{6.4}$$

Резерв времени R(i) i-го события определяется как разность между поздним и ранним сроками его свершения:

$$\mathrm{R(i)} = t_П(i) - t_р(i). \tag{6.5}$$

Резерв времени события показывает, на какой допустимый период времени можно задержать наступление этого события, не вызывая при этом увеличения срока выполнения комплекса работ.

Критические события резервов времени не имеют, так как любая задержка в свершении события, лежащего на критическом пути, вызовет такую же задержку в свершении завершающего события.

Из этого следует, что для того чтобы определить длину и топологию критического пути, вовсе не обязательно перебирать все полные пути сетевого графика и определять их длины. *Определив ранний срок наступления завершающего события сети, мы тем самым определяем длину критического пути, а выявив события с нулевыми резервами времени, определяем его топологию.*

Задача 1. Определить временные параметры событий и критический путь для сетевого графика, изображенного на рис. 6.4.

Решение. Найденные параметры сведем в табл. 6.2.

При определении ранних сроков свершения событий $t_р(i)$ двигаемся по сетевому графику слева направо и используем формулы (6.1) и (6.2).

Для i=0 (нулевого события) очевидно, что $t_Р(0) = 0$. Для $i=1$ $t_р(1)=t_р(0)+t(0,1) = 0+8 = 8$ (суток), так как для события 1 существует только один предшествующий путь $L_{п1}$: $0 \to 1$. Для $i= 2$ $t_р(2) = t_р(1)+t(1,2) = 8+9 = 17$ (суток), так как для события *2* существует только один предшествующий путь $L_{п2}$: $0 \to 1 \to 2$. Для $i = 3$ $t_р(3) = \max\{t_р(0)+t(0,3);\ t_р(1)+t(1,3)\} = \max\{0+13;\ 8+4\} = \max\{13;\ 12\} = 13$ (суток), так как для события *3* существуют два предшествующих пути $L_{п3}$ $0 \to 1 \to 3$ и $0 \to 3$ и два предшествующих события – *0* и *1.*

Таблица 6.2

Номер события	Сроки свершения события, сутки		Резерв времени *R(i)*, сутки
	ранний $t_р(i)$	поздний $t_п(i)$	
0	0	0	0
1	8	9	1
2	17	40	23
3	13	13	0
4	23	26	3
5	20	20	0
6	29	29	0
7	33	43	10
8	37	38	1
9	42	42	0
10	48	48	0
11	61	61	0

Аналогично:

$t_р(4)$ = max{$t_р(1)+t(1,4)$; $t_р(3)+t(3,4)$} = max{8+6; 13+10} = max{14; 23} = 23(суткам),

$t_р(5)$ = max{$t_р(3)+t(3,5)$; $t_р(0)+t(0,5)$} = max{13+7; 0+9} = max{20; 9} = 20(суткам),

$t_р(6)$ = max{$t_р(4)+t(3,4)$; $t_р(3)+t(3,6)$; $t_р(5)+t(5,6)$} = max{23+3; 13+6; 20+9} = max{26; 19; 29} = 29 (суткам) и т.д.

Длина критического пути равна раннему сроку свершения завершающего события 11 (*см.* табл. 6.2):

$$t_{кр}=t_р,(11)=61 \text{ (суткам).}$$

При определении поздних сроков свершения событий $t_П(i)$ двигаемся по сети в обратном направлении, т.е. справа налево, и используем формулы (6.3) и (6.4).

Для $i=11$ (завершающего события) поздний срок свершения события должен равняться его раннему сроку (иначе изменится длина критического пути): $t_п(11)=t_р(11)=61$ (сутки).

Для $i=10$ $t_П(10)=t_р(11)-t(10,11)$=61-13=48 (суток), так как для события *10* существует только один последующий путь L_{C10}*:10→11.*

Для i=9 $t_П(9)$ = min{$t_П(10)-t(9,10)$; $t_П(11)-t(9,10)$} = min{48-6; 61-17} = min{42; 44}=42 (суткам), так как для события 9 существуют два последующих пути L_{C9}*:9→10→11* и *9→11* и два последующих события – 10 и 11.

Аналогично:

$t_П(8)=t_П(9)-t(8,9)$=42-4= 38 (суткам);

$t_П(7)=t_П(10)-t(7,10)$= 48-5 = 43 (суткам);

$t_П(6)$ = min{$t_П(7)-t(6,7)$; $t_П(10)-t(6,10)$; $t_П(9)-t(6, 9)$; $t_П(8)-t(6,8)$;} =min (43-4; 48-5; 42-13; 38-8) = min (39; 43; 29; 30)= 29 (суткам) и т.д.

По формуле (6.5) определяем резервы времени i-го события:

$R(0) = 0$; $R(1) = 9-8 = 1$; $R(2)= 40-17 = 23$ и т.д.

Резерв времени, например, события *2* — $R(2)$ = 23 – означает, что время свершения события *2* может быть задержано на 23 суток без увеличения общего срока выполнения проекта. Анализируя табл. 2, видим, что не имеют резервов времени события *0, 3, 5, 6, 9, 11*. Эти события и образуют критический путь (на рис. 5 он выделен жирным шрифтом)

Теперь перейдем к **параметрам работ.**

Отдельная работа может начаться (и окончиться) в ранние, поздние или другие промежуточные сроки. В дальнейшем при оптимизации графика возможно любое размещение работы в заданном интервале.

Очевидно, что ранний срок $t_{рн}(i, j)$ начала работы (i, j) совпадает с ранним сроком наступления начального (предшествующего) события i, т.е.:

$$t_{рн}(i, j) = t_р(i). \qquad (6.6)$$

Тогда ранний срок $t_{ро}(i, j)$ окончания работы (i,j) определяется по формуле:

$$t_{ро}(i, j) = 't_р(i)+t(i,j). \qquad (6.7)$$

Ни одна работа не может окончиться позже допустимого позднего срока своего конечного события. Поэтому поздний срок окончания работы (i,j) определяется соотношением:

$$t_{по}(i, j)=t_П(j), \qquad (6.8)$$

а поздний срок $t_{пн}(i, j)$ начала этой работы — соотношением:

$$t_{пн}(i, j) = t_П(j) - t(i, j)\,. \qquad (6.9)$$

Таким образом, в рамках сетевой модели моменты начала и окончания работы тесно связаны с соседними событиями ограничениями (6.6)—(6.9).

Прежде чем рассматривать резервы времени работ, обратимся к резерву времени пути. Такие резервы имеют все некритические пути. *Резерв времени пути R(L) определяется как разность между длиной критического и рассматриваемого пути:*

$$R(L)=t_{кр} - t(L). \qquad (6.10)$$

Он показывает, насколько в сумме могут быть увеличены продолжительности всех работ, принадлежащих этому пути. Если затянуть выполнение работ, лежащих на этом пути, на время большее чем *R(L),* то критический путь переместится на путь *L*.

Отсюда можно сделать вывод, что *любая из работ пути L на его участке, не совпадающем с критическим путем (замкнутым между двумя событиями критического пути), обладает резервом времени.*

Среди резервов времени работ выделяют четыре разновидности.

Полный резерв времени $R_П(i, j)$ работы (i, j) показывает, насколько можно увеличить время выполнения данной работы при условии, что срок выполнения комплекса работ не изменится. Полный резерв $R_П(i, j)$ определяется по формуле:

$$R_П(i, j) = t_n(j) - t_p(i) - t(i, j)\,. \tag{6.11}$$

Полный резерв времени работы равен резерву максимального из путей, проходящего через данную работу. Этим резервом можно располагать при выполнении данной работы, если ее начальное событие свершится в самый ранний срок, и можно допустить свершение конечного события в его самый поздний срок (рис. 6.6).

Важным свойством полного резерва времени работы является то, что он принадлежит не только этой работе, но и всем полным путям, проходящим через нее. При использовании полного резерва времени только для одной работы резервы времени остальных работ, лежащих на максимальном пути, проходящем через нее, будут полностью исчерпаны. Резервы времени работ, лежащих на других (не максимальных по длительности) путях, проходящих через эту работу, сократятся соответственно на величину использованного резерва.

Остальные резервы времени работы являются частями ее полного резерва.

Частный резерв времени первого вида R_I работы (i, j) есть часть полного резерва времени, на которую можно увеличить продолжительность работы, не изменив при этом позднего срока ее начального события. Этим резервом можно располагать при выполнении данной работы в предположении, что ее начальное и конечное события свершаются в свои самые поздние сроки (см. рис. 6.6).

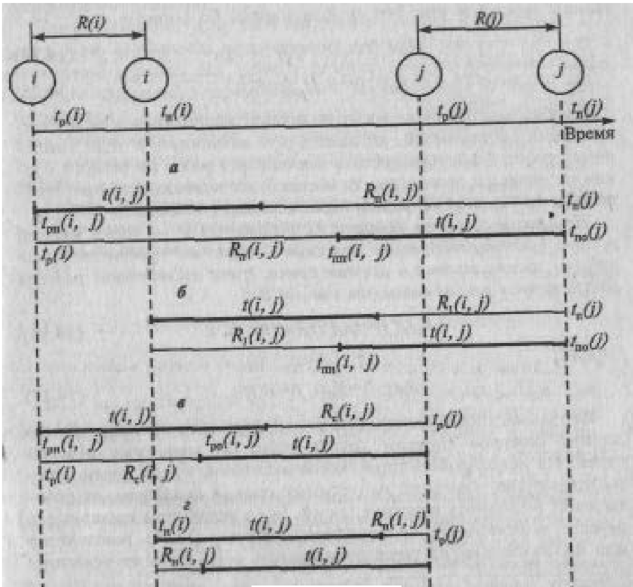

Рис.6.6

R_1 находится по формуле:

$$R_1(i,j)=t_n(j)-t_p(i)-t(i,j), \tag{6.12}$$

$$R_1(i, j)=R_П(i, j)-R(i). \tag{6.13}$$

Частный резерв времени второго вида, или *свободный резерв времени R_c работы (i, j) представляет часть полного резерва времени, на которую можно увеличить продолжительность работы, не изменив при этом раннего срока ее конечного события.* Этим резервом можно располагать при выполнении данной работы в предположении, что ее начальное и конечное события свершатся в свои самые ранние сроки. R_c находится по формуле:

$$R_c(i, j)=t_p(j)-t_p(i)-t(i, j), \tag{6.14}$$

$$R_1(i, j)=R_П(i, j)-R(j). \tag{6.15}$$

Свободным резервом времени можно пользоваться для предотвращения случайностей, которые могут возникнуть в ходе выполнения работ. Если планировать выполнение работ по ранним срокам их начала и окончания, то всегда будет возможность при необходимости перейти на поздние сроки начала и окончания работ.

Независимый резерв времени $R_н$, работы (i, j) — часть полного резерва времени, получаемая для случая, когда все предшествующие работы заканчиваются в поздние сроки, а все последующие работы начинаются в ранние сроки.

$$R_н(i, j)=t_р(j)-t_П(i)-t(i, j), \tag{6.16}$$

или

$$R_н(i,j)=R_П(i,j)-r(i). \tag{6.17}$$

Использование независимого резерва времени не влияет на величину резервов времени других работ. Независимые резервы стремятся использовать тогда, когда окончание предыдущей работы произошло в поздний допустимый срок, а последующие работы хотят выполнить в ранние сроки. Если величина независимого резерва, определяемая по формуле (6.16) или (6.17), равна нулю или положительна, то такая возможность есть. Если же величина $R_н(i, j)$ отрицательна, то этой возможности нет, так как предыдущая работа еще не оканчивается, а последующая уже должна начаться. Поэтому отрицательное значение $R_н(i, j)$ не имеет реального смысла. А фактически независимый резерв имеют лишь те работы, которые не лежат на максимальных путях, проходящих через их начальные и конечные события.

Следует отметить, что резервы времени работы *(i, j)*, показанные на рис. 6.6, могут состоять из двух временных отрезков, если интервал продолжительности работы $t(i, j)$ занимает промежуточную позицию между двумя его крайними положениями, изображенными на графиках.

Таким образом, *если частный резерв времени первого вида может быть использован на увеличение продолжительности данной и последующих работ без затрат резерва времени предшествующих работ, а свободный резерв времени — на увеличение продолжительности данной и предшествующих работ без нарушения резерва времени последующих работ, то независимый резерв времени может быть использован для увеличения продолжительности только данной работы.*

Работы, лежащие на критическом пути, так же как и критические события, резервов времени не имеют.

Если на критическом пути лежит начальное событие *i*, то

$$R_п(i, j) =R_1(i, j). \tag{6.18}$$

Если на критическом пути лежит конечное событие *j*, то

$$R_п(i, j) =R_c(i, j). \tag{6.19}$$

Если на критическом пути лежат начальное и конечное события i и *j*, но сама работа не принадлежит этому пути, то

$$R_п(i, j) = R_1(i, j) = R_c(i, j) = R_н(i, j). \qquad (6.20)$$

Соотношения (6.18) — (6.20) можно использовать при проверке правильности расчетов резервов времени отдельных работ.

Задача 2. Вычислить временные параметры работ для сетевого графика, изображенного на рис. 6.4.

Результаты расчетов сведем в табл. 6.3.

Вычисление временных параметров работы *(i, j)* покажем на примере работы *(1, 4):*

ранний срок начала работы (по формуле (6.16)): $t_{рн}(1,4)=t_р(1)$=8(суток),

ранний срок окончания работы (по формуле 6.17): $t_{ро}(1,4)=t_р(1)+t(1,4)=$ =8+6=14 (суток);

поздний срок начала работы (по формуле 6.19): $t_{пн}(1,4)=t_п(4)-t(1,4)=$ 26 - -6 = 20 (суток), где $t_п(4)$ = 26 (см. табл. 6.2);

поздний срок окончания работы (по формуле 6.18): $t_{по}(1\ 4)=t_п(4)$=26(суток).

Таким образом, работа *(t, 4)* должна начаться в интервале [8; 28] (суток) и окончиться в интервале [12; 26] (суток) от начала выполнения проекта.

Полный резерв работы *(1, 4)* (по формуле 6.11): $R_п(1,4)=t_п(4)-t_р(1)-$ $-t(1,4)$ = 26-8-6=12 (суток), т.е. срок выполнения данной работы можно увеличить на 12 суток, при этом срок выполнения комплекса работ не изменится.

Таблица 6.3

№ п/п	Работа (i,j)	Продолжитель-ность работы *t(i,j)*	Сроки начала и окончания работы				Резервы времени работы			
			$t_{рн}(i,j)$	$t_{ро}(i,j)$	$t_{пн}(i,j)$	$t_{по}(i,j)$	$R_п(i,j)$	$R_j(i,j)$	$R_c(i,j)$	$R_н(i,j)$
1	*(0,1)*	8	0	8	1	9	1	1	0	0
2	*(0,3)*	13	0	13	0	13	0	0	0	0
3	*(0,5)*	9	0	9	11	20	11	11	11	11
4	*(1,2)*	9	8	17	31	40	23	22	0	
5	*(1,4)*	6	8	14	20	26	12	11	9	8
6	*(1,3)*	4	8	12	9	13	1	0	1	0

7	*(2,7)*	3	17	20	40	43	23	0	13	
8	*(3,4)*	10	13	23	16	26	3	3	0	0
9	*(3,5)*	7	13	20	13	20	0	0	0	0
10	*(3,6)*	б	13	19	23	29	10	10	10	10
11	*(4,7)*	8	23	31	35	43	12	9	2	-
12	*(4,6)*	3	23	26	26	29	3	0	3	0
13	*(5,6)*	9	20	29	20	29	0	0	0	0
14	*(5,8)*	10	20	30	28	38	8	8	7	7
15	*(5,9)*	6	20	26	36	42	16	16	16	16
16	*(6,7)*	4	29	33	39	43	10	10	0	0
17	*(6,10)*	5	29	34	43	48	14	14	14	14
18	*(6,9)*	13	29	42	29	42	0	0	0	0
19	*(6,8)*	8	29	37	30	38	1	1	0	0
20	*(7,10)*	5	33	38	43	48	10	0	10	0
21	*(8,9)*	4	37	41	38	42	1	0	1	0
22	*(9,10)*	6	42	48	42	48	0	0	0	0
23	*(9,11)*	17	42	59	44	61	2	2	2	2
24	*(10,11)*	13	48	61	48	61	0	0	0	0

Покажем на примере работы *(1, 4),* что полный резерв времени работы равен продолжительности максимального из путей, проходящих через данную работу.

Через работу *(1, 4)* проходят семь полных путей (см. рис. 6.4):

	Путь	*Продолжительность, сутки*
L_1	$0 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 10 \rightarrow 11$	39
L_2	$0 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 8 \rightarrow 9 \rightarrow 10 \rightarrow 11$	48
L_3	$0 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 8 \rightarrow 9 \rightarrow 11$	46
L_4	$0 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 9 \rightarrow 10 \rightarrow 11$	49

L_5	$0 \to 1 \to 4 \to 6 \to 9 \to 11$	47
L_6	$0 \to 1 \to 4 \to 6 \to 10 \to 11$	35
L_7	$0 \to 1 \to 4 \to 7 \to 10 \to 11$	40

Отсюда максимальным из путей, проходящих через работу *(1, 4),* является путь L_4 продолжительностью 49 (суток), резерв времени которого (по формуле (6.10)) $R(L_4)$ =61-49=12 (суток).

Как видим, полный резерв времени работы *(1, 4)* оказался равным резерву пути L_4 – максимального из путей, проходящих через эту работу. Если увеличить продолжительность выполнения работы $t(1, 4)$ на 12 суток, т.е. с 6 до 18 суток, то полностью будет исчерпан резерв времени пути L_4 , т.е. этот путь станет также критическим, а резервы времени других путей уменьшатся соответственно на 12 суток.

Частный резерв времени работы (1, *4)* первого вида определим по формуле (6.12) (или по формуле 13): $R_1(1, 4) = t_n(4)-t_n(1)=t(1, 4)=$ 26-9-6=11 (суток) (или $R_1(1, 4) = R_n(1, 4) – R_n(1,4)-R(1)$ = 12 - 1 = 11 (суток), т.е. при сохранении общего срока выполнения проекта на 11 суток может быть задержано выполнение работы (1, *4)* и последующих работ (по любому из путей L_1, L_2,, ..., L_7) без затрат резерва времени предшествующих ей работ (в данном случае без затрат резерва времени одной предшествующей работы *(0,1)*).

Частный резерв времени второго вида, или свободный резерв времени, работы *(1, 4)* найдем по формуле (6.14) (или 6.15)): $R_c(1, 4) = t_p(4)-t_p(1)$ - $-t(l,4)$ = 23-8-6 = 9 (суток) (или $R_c(1, 4) = R_n(1, 4)-R(4)$ = 12-3 = 9 (суток), т.е. при сохранении общего срока выполнения проекта на 9 суток может быть задержано выполнение работы *(1, 4)* и предшествующих ей работ (в данном случае работы *(0, 1))* без нарушения резерва времени последующих работ.

Независимый резерв времени работы (*1, 4)* определим по формуле (6.16) (или (6.17)): $R_H(1, 4) = t_p(4)-t_n(1)-t(1, 4)$ = 23-9-6 = 8 (суток) (или $R_н(1,4)$ = $=R_n(1,4)-R(1)-R(4)$ = 12-1-3 = 8 (суток), т.е. на 8 суток может быть увеличена продолжительность работы (*1, 4)* без изменения резервов времени всех остальных работ.

Обратим внимание на то, что независимые резервы работ *(1, 2), (2, 7)* и *(4, 7)* отрицательны (в табл. 6.3 они обозначены прочерком). Например, $R_н(2, 7) =t_p(7)-t_n(2)-t(2, 7)$ = 33-40-3 = -10. Это означает, что работа *(2, 7)* продолжительностью 3 (суток) должна закончиться на 33-и сутки после начала комплекса работ, а начаться на 40-е сутки, что, естественно, невозможно.

Подчеркнем, что резервы критических работ *(0, 3), (3, 5), (5, 6), (6, 9), (9, 10), (10, 11),* так же как и резервы критических событий, равны нулю. Следует отметить, что в случае достаточно простых сетевых графиков результаты расчета их временных параметров можно фиксировать прямо на графике. Параметры событий записываются в кружках, разделенных на четыре части, а параметры работ – над соответствующими стрелками (рис. 6.7). При этом отпадает необходимость составления таблиц.

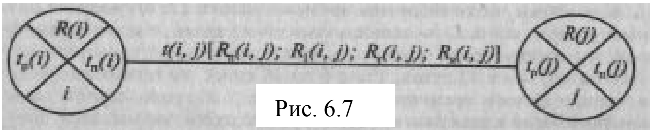

Рис. 6.7

6.5.Сетевое планирование в условиях неопределенности

При определении временных параметров сетевого графика до сих пор предполагалось, что время выполнения каждой работы точно известно. Такое предположение в действительности выполняется редко: напомним, что система СПУ обычно применяется для планирования сложных разработок, не имевших в прошлом никаких аналогов. Чаще всего продолжительность работы по сетевому графику заранее неизвестна и может принимать лишь одно из ряда возможных значений. Другими словами, продолжительность работы $t(i,j)$ является случайной величиной, характеризующейся своим законом распределения, а значит, своими числовыми характеристиками – средним значением, или математическим ожиданием, $\bar{t}(i,j)$ и дисперсией $\sigma^2(i,j)$.

Практически во всех системах СПУ априори принимается, что распределение продолжительности работ обладает тремя свойствами: а) непрерывностью; б) унимодальностью, т.е. наличием единственного максимума у кривой распределения; в) двумя точками пересечения кривой распределения с осью $0x$, имеющими неотрицательные абсциссы. Кроме того, установлено, что распределение продолжительности работ обладает положительной асимметрией, т.е. максимум кривой смещен влево относительно медианы (линии, делящей площадь под кривой на две равные части). Распределение, как правило, более круто поднимается при удалении от минимального значения (и полого опускается при приближении к максимальному значению t (рис. 6.8)).

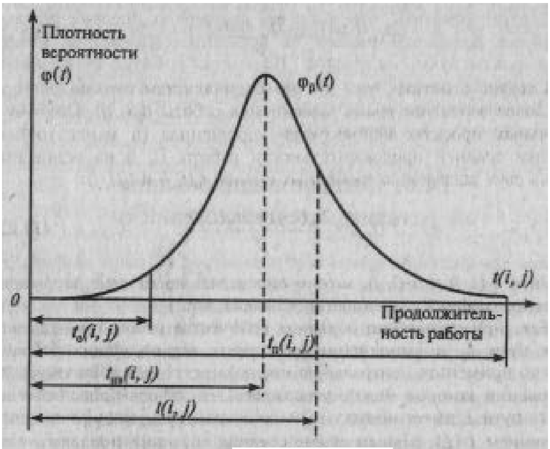

Рис. 6.8

Простейшим распределением с подобными свойствами является известное в математической статистике *β - распределение.* Анализ большого количества статистических данных (хронометражи времени реализации отдельных работ, нормативные данные и т.д.) показывает, что *β-распределение* можно использовать в качестве априорного для всех работ.

Для определения числовых характеристик $\bar{t}(i, j)$ и $\sigma^2(i, j)$ этого распределения для работы *(i, j)* на основании опроса ответственных исполнителей проекта и экспертов определяют три временные оценки (рис. 6.8):

а) *оптимистическую оценку* $t_0(i, j)$, т.е. продолжительность работы *(i, j)* при самых благоприятных условиях;

б) *пессимистическую оценку* $t_П(i, j)$, т.е. продолжительность работы *(i, j)* при самых неблагоприятных условиях;

в) *наиболее вероятную оценку* $t_{нв}(i, j)$, т.е. продолжительность работы *(i, j)* при нормальных условиях.

Предположение о β-распределении продолжительности работы *(i, j)* позволяет получить следующие оценки ее числовых характеристик:

$$\bar{t}(i, j) = \frac{t_0(i, j) + 4t_{нв}(i, j) + t_п(i, j)}{6}, \tag{6.21}$$

$$\sigma^2(i, j) = \left[\frac{t_п(i, j) - t_0(i, j)}{6}\right]^2. \tag{6.22}$$

Следует отметить, что обычно специалистам сложно оценить наиболее вероятное время выполнения работы $t_{нв}(i, j)$. Поэтому в реальных проектах используется упрощенная (и менее точная) оценка средней продолжительности работы (i, j) на основании лишь двух задаваемых временных оценок $t_0(i, j)$ и $t_П(i, j)$:

$$\bar{t}(i, j) = \frac{2t_0(i, j) + 3t_п(i, j)}{5} \tag{6.23}$$

Зная $\bar{t}(i, j)$ и $\sigma^2(i, j)$, можно определять временные параметры сетевого графика и оценивать их надежность.

Так, при достаточно большом количестве работ, принадлежащих пути L, и выполнении некоторых весьма общих условий можно применить центральную предельную теорему Ляпунова, на основании которой можно утверждать, что общая продолжительность пути L имеет нормальный закон распределения со средним значением $\bar{t}(L)$, равным сумме средних значений продолжительности составляющих его работ $\bar{t}(i, j)$ и дисперсией $\sigma^2(L)$, равной сумме соответствующих дисперсий $\sigma^2(i, j)$:

$$\bar{t}(L) = \sum_{i,j} \bar{t}(i, j); \tag{6.24}$$

$$\sigma^2(L) = \sum_{i,j} \sigma^2(i, j). \tag{6.25}$$

Предположим, что сетевой график на рис. 6.4 представляет сеть не с детерминированными (фиксированными), а со случайными продолжительностями работ и цифры над работами-стрелками указывают средние значения $\bar{t}(i, j)$ продолжительности соответствующих операций, найденные по формуле (6.21) или (6.23), и известны все дисперсии $\sigma^2(i, j)$, вычисленные по формуле (6.22).

Следует отметить, что и в этом случае временные параметры сетевого графика — длина критического пути, ранние и поздние сроки свершения событий, резервы времени событий и работ и т д. – будут такие же, как и найденные выше. Но при этом необходимо учесть, что эти параметры, представленные в табл. 6.2 и 6.3, теперь будут являться средними значениями соответствующих случайных величин: средней длиной критического пути $\bar{t}_{кр}$, средним значением раннего срока наступления события $\bar{t}_{р}(i)$, средним значением полного резерва времени работы $\bar{R}_{п}(i, j)$ и т.п.

Так, $\bar{t}_{кр}$ =61 будет означать, что длина критического пути лишь в среднем составляет 61 сутки, а в каждом конкретном проекте возможны заметные отклонения длины критического пути от ее среднего значения (причем чем больше суммарная дисперсия продолжительности работ критического пути, тем более вероятны значительные по абсолютной величине отклонения).

Поэтому предварительный анализ сетей со случайными продолжительностями работ, как правило, не ограничивается расчетами временных параметров сети. Весьма важным моментом анализа становится оценка вероятности того, что срок выполнения проекта $t_{кр}$ не превзойдет заданного директивного срока *T*.

Полагая $t_{кр}$ случайной величиной, имеющей нормальный закон распределения, получим:

$$P(t_{кр} \leq T) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{T - \bar{t}_{кр}}{\sigma_{кр}}\right) \tag{6.26}$$

(на рис. 6.9 это площадь заштрихованной фигуры), где *Φ(z)* — значение интеграла вероятностей Лапласа, $z = (T - \bar{t}_{кр}) / \sigma_{кр}$, $\sigma_{кр}$ -среднее квадратическое отклонение длины критического пути:

$$\sigma_{кр} = \sqrt{\sigma^2_{кр}}\,, \tag{6.27}$$

а $\bar{t}_{кр}$ и $\sigma^2_{кр}$ определяются по формулам (6.24) и (6.25).

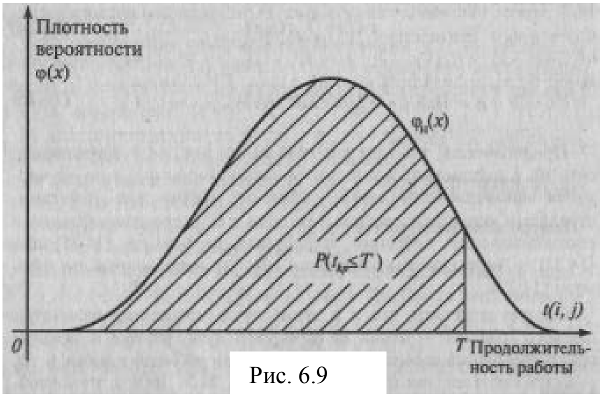

Рис. 6.9

Если $P(t_{кр} \le T)$ мала (например, меньше 0,3), то опасность срыва заданного срока выполнения комплекса велика, необходимо принятие дополнительных мер (перераспределение ресурсов по сети, пересмотр состава работ и событий и т.п. – об этом речь пойдет дальше). Если $P(t_{кр} \le T)$ значительна (например, более-0,8), то, очевидно, с достаточной степенью надежности можно прогнозировать выполнение проекта в установленный срок.

В некоторых случаях представляет интерес и решение обратной задачи: определение максимального срока выполнения проекта *T,* который возможен с заданной надежностью (вероятностью) р. В этом случае:

$$T = \bar{t}_{кр} + z_{\beta} \sigma_{кр}{}^{2}, \tag{6.28}$$

где z_{β} — нормированное отклонение случайной величины, определяемое с помощью функции Лапласа $\Phi(z_{\beta}) = \beta$.

Задача 3. Пусть, например, для сети (рис. 6.4) дисперсии продолжительности работ критического пути равны: $\sigma^2(0,3)=2,5$; $\sigma^2(3,5)=2,1$; $\sigma^2(5,6)=3,2$; $\sigma^2(6,9)=4,0$; $\sigma^2(9,10)=1,5$; $\sigma^2(10,11)=3,5$. Оценить вероятность выполнения проекта в срок T= 63 суткам.

Решение: Найдем $\sigma_{кр}$, используя формулы (6.25) и (6.27):

$$\sigma_{кр} = \sqrt{\sigma^2(0,3) + \sigma^2(3,5) + \sigma^2(5,6) + \sigma^2(6,9) + \sigma^2(9,10) + \sigma^2(10,11)} =$$
$$\sqrt{2,5 + 2,1 + 3,2 + 4,0 + 1,5 + 3,5} = \sqrt{16,8} \approx 4,1.$$

Теперь искомая вероятность:

$$P(t_{кр} \le 63) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{63-61}{4{,}1}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{2}{4{,}1}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Phi(0{,}49) =$$
$$= 0{,}5 + 0{,}5 \cdot 0{,}376 = 0{,}688 \approx 0{,}69,$$

т.е. можно с известным риском предполагать выполнение проекта в срок.

Рассмотрим и пример решения обратной задачи: оценить максимально возможный срок Т выполнения проекта с надежностью β=0,95.

По формуле (6.28)[1] $T = 61 + z_{0,95} \cdot 4{,}1 = 61 + 1{,}96 \cdot 4{,}1 \approx 69$, т.е. с надежностью 0,95 срок выполнения проекта не превысит 69 суток.

Следует отметить, что для данной сети мы можем найти лишь весьма приближенные оценки $P(t_{кр} \le T)$ и *T,* ибо на основании теоремы Ляпунова вывод о нормальном законе распределения случайной величины $t_{кр}$ правомерен лишь для достаточно большого числа критических работ, а в рассматриваемой сети их всего 6.

Однако приведенный метод расчета имеет принципиальные недостатки оценки параметров даже сложных сетей с большим количеством работ. Дело в том, что на практике нередки случаи, когда дисперсии $\sigma^2(\mathrm{L})$ длин некритических (но близких к критическому) путей существенно больше, чем $\sigma^2{}_{кр}$. Поэтому при изменении ряда условий в данном конкретном комплексе работ возможен переход к новым критическим путям, которые в расчете не учитываются.

Различия между событиями с детерминированными случайными продолжительностями работ не следует путать с различием детерминированных и стохастических сетей. Последнее различие связано со структурой самой сети.

Рассмотренные до сих пор сети являлись *детерминированными,* хотя работы в них могли характеризоваться не только детерминированными, но и случайными продолжительностями. Вместе с тем встречаются проекты, когда на некоторых этапах тот или иной комплекс последующих работ зависит от не известного заранее результата. Какой из этих комплексов работ будет фактически выполняться, заранее не известно, а может быть предсказано лишь с некоторой вероятностью. Например, может быть предусмотрено несколько вариантов продолжения исследования в зависимости от полученных опытных данных или несколько вариантов строительства предприятий различной мощности по обработке сырья в зависимости от результатов разведки запасов этого сырья. Такие сети называются *стохастическими.*

---

[1] $z_{0,95}$=1,96 определяем по таблице значений функции Лапласа.

В свою очередь стохастические сети, так же как и детерминированные, могут характеризоваться детерминированными либо случайными продолжительностями.

6.6. Коэффициент напряженности работы. Анализ и оптимизация сетевого графика

После нахождения критического пути и резервов времени работ и оценки вероятности выполнения проекта в заданный срок должен быть проведен всесторонний анализ сетевого графика и приняты меры по его оптимизации. Этот весьма важный этап в разработке сетевых графиков раскрывает основную идею СПУ. Он заключается в приведении сетевого графика в соответствие с заданными сроками и возможностями организации, разрабатывающей проект.

Вначале рассмотрим анализ и оптимизацию *календарных сетей, в* которых заданы только оценки продолжительности работ.

Анализ сетевого графика начинается с анализа топологии сети, включающего контроль построения сетевого графика, установление целесообразности выбора работ, степени их расчленения.

Затем проводятся классификация и группировка работ по величинам резервов. Следует отметить, что величина полного резерва времени далеко не всегда может достаточно точно характеризовать, насколько напряженным является выполнение той или иной работы некритического пути. Все зависит от того, на какую последовательность работ распространяется вычисленный резерв, какова продолжительность этой последовательности.

Определить степень трудности выполнения в срок каждой группы работ некритического пути можно с помощью коэффициента напряженности работ.

Коэффициентом напряженности $K_н$, работы (i, j) называется отношение продолжительности несовпадающих (заключенных между одними и теми же событиями) отрезков пути, одним из которых является путь максимальной продолжительности, проходящий через данную работу, а другим – критический путь:

$$K_н(i, j) = \frac{t(L_{\max}) - t'_{кр}}{t_{кр} - t'_{кр}}, \qquad (6.29)$$

где $t(L_{\max})$ – продолжительность максимального пути, проходящего через работу (i,j);

$t_{кр}$ – продолжительность (длина) критического пути;

$t'_{кр}$ – продолжительность отрезка рассматриваемого пути, совпадающего с критическим путем.

Формулу (6.29) можно легко привести к виду:

$$K_н(i, j) = 1 - \frac{R_п(i, j)}{t_{кр} - t'_{кр}}, \tag{6.30}$$

где $R_п(i, j)$ – полный резерв времени работы *(i, j)*.

Коэффициент напряженности $K_н(i, j)$ может изменяться в пределах от 0 (для работ, у которых отрезки максимального из путей, не совпадающие с критическим путем, состоят из фиктивных работ нулевой продолжительности) до 1 (для работ критического пути).

Задача 4. Найти коэффициент напряженности работы *(1, 4)* для сетевого графика (рис. 6.4).

Решение. Мы установили, что длина критического пути $t_{кр}$=61 (сутки), а максимальный путь, проходящий через работу *(1,4)* – путь L_4 $0 \to 1 \to 4 \to 6 \to 9 \to 10 \to 11$ — имеет продолжительность $t(L_{max})=t(L_4)=49$ (суток). Максимальный путь L_4 совпадает с критическим (см. рис.6.4) на отрезке $6 \to 9 \to 10 \to 11$ продолжительностью $t_{кр}$=13+6+13=32 (сутки). Используя формулу (6.29), найдем:

$$K_н(1,4) = \frac{49-32}{61-32} = \frac{17}{29} \approx 0{,}59 \cdot$$

Или иначе: зная полный резерв работы $R_п(1, 4)=12$ (см. рис. 6.3), по формуле (6.30) находим:

$$K_н(1,4) = 1 - \frac{12}{61-32} = \frac{17}{29} \approx 0{,}59 \cdot$$

Чем ближе к 1 коэффициент напряженности $K_н(i, j)$, тем сложнее выполнить данную работу в установленные сроки. Чем ближе $K_н(i, j)$ к нулю, тем большим относительным резервом обладает максимальный путь, проходящий через данную работу.

Работы могут обладать одинаковыми полными резервами, но степень напряженности сроков их выполнения, выражаемая коэффициентом напряженности $K_н(i, j)$, может быть различна. И наоборот, различным полным резервам могут соответствовать одинаковые коэффициенты напряженности.

Так, полные резервы работ (3, 6) и (6, 7) для сетевого графика равны: $R_n(3, 6)=R_n(6, 7)=10$ (суток) — см. табл. 3, а их коэффициенты напряженности различны:

$$K_н(3,6)=\frac{6}{16}\approx 0{,}38\,, \qquad K_н(6,7)=\frac{9}{19}\approx 0{,}47\,.$$

Обратим внимание на то, что больший полный резерв одной работы (по сравнению с другой) не обязательно свидетельствует о меньшей степени напряженности ее выполнения. Так, в рассматриваемой сети *(см.* рис. 6.5), хотя работа *(2, 7)* обладает большим полным резервом по сравнению с работой *(6, 10)*: $R_n(2,7)=23>R_n(6, 10)=14$, но имеет вдвое больший коэффициент напряженности: $K_н(2,7)=\frac{25}{48}\approx 52$ против $K_н(6,10)=\frac{5}{19}\approx 0{,}26$.

Это объясняется разным удельным весом полных резервов работ в продолжительности отрезков максимальных путей, не совпадающих с критическим путем.

Вычисленные коэффициенты напряженности позволяют дополнительно классифицировать работы по зонам. В зависимости от величины $K_н(i, j)$ *выделяют три зоны: критическую* ($K_н(i, j)>0{,}8$); *подкритическую* ($0{,}6<K_н(i, j)<0{,}8$); *резервную* ($K_н(i, j)<0{,}6$).

Оптимизация сетевого графика представляет процесс улучшения организации выполнения комплекса работ с учетом срока его выполнения. Оптимизация проводится с целью сокращения длины критического пути, выравнивания коэффициентов напряженности работ, рационального использования ресурсов.

В первую очередь принимаются меры по сокращению продолжительности работ, находящихся на критическом пути. Это достигается:

- перераспределением всех видов ресурсов, как временных (использование резервов времени некритических путей), так и трудовых, материальных, энергетических (например, перевод части исполнителей, оборудования с некритических путей на работы критического пути); при этом перераспределение ресурсов должно идти, как правило, из зон, менее напряженных, в зоны, объединяющие наиболее напряженные работы;
- сокращением трудоемкости критических работ за счет передачи части работ на другие пути, имеющие резервы времени;
- параллельным выполнением работ критического пути;
- пересмотром топологии сети, изменением состава работ и структуры сети.

В процессе сокращения продолжительности работ критический путь может измениться, и в дальнейшем процесс оптимизации будет направлен на сокращение продолжительности работ нового критического пути, и так будет продолжаться до получения удовлетворительного результата. В идеале длина любого из полных путей может стать равной длине критического пути или по крайней мере пути критической зоны. Тогда все работы будут вестись с равным напряжением, а срок завершения проекта существенно сократится.

Весьма эффективным является использование *метода статистического моделирования,* основанного на многократных последовательных изменениях продолжительности работ (в заданных пределах) и "проигрывании" на компьютере различных вариантов сетевого графика с расчетами всех его временных параметров и коэффициентов напряженности работ. Процесс "проигрывания" продолжается до тех пор, пока не будет получен приемлемый вариант плана или пока не будет установлено, что все имеющиеся возможности улучшения плана исчерпаны и поставленные перед разработчиком проекта условия невыполнимы.

До сих пор мы говорили лишь о соблюдении директивных сроков выполнения комплекса работ и не затрагивали непосредственно вопросов стоимости разработки проектов. Однако на практике при попытках эффективного улучшения составленного плана неизбежно введение дополнительно к оценкам сроков фактора стоимости работ.

6.7. Оптимизация сетевого графика методом "время – стомость"

Оптимизация сетевого графика в зависимости от полноты решаемых задач может быть условно разделена на частную и комплексную. Видами *частной оптимизации* сетевого графика являются: минимизация времени выполнения комплекса работ при заданной его стоимости; минимизация стоимости комплекса работ при заданном времени выполнения проекта.

Комплексная оптимизация представляет собой нахождение оптимального соотношения величин стоимости и сроков выполнения проекта в зависимости от конкретных целей, ставящихся при его реализации.

При использовании метода "время — стоимость" предполагают, что уменьшение продолжительности работы пропорционально возрастанию ее стоимости. Каждая работа (i, j) характеризуется продолжительностью $t(i, j)$, которая может находиться в пределах:

$$a(i, j) \le t(i, j) \le b(i, j)\,, \tag{6.31}$$

где $a(i,j)$ — минимально возможная (экстренная) продолжительность работы (i, j), которую только можно осуществить в условиях разработки; $b(i,j)$ — нормальная продолжительность выполнения работы (i, j).

При этом стоимость $C(i, j)$ работы (i, j) заключена в границах от $C_{min}(i,j)$ (при нормальной продолжительности работы) до $C_{max}(i, j)$ (при экстренной продолжительности работы).

Используя аппроксимацию по прямой (см. рис. 6.10), можно легко найти изменение стоимости работы $\Delta c(i, j)$ при сокращении ее продолжительности на величину

$$\Delta c(i, j)=[b(i, j)-t(i, j)]h(i, j). \tag{6.32}$$

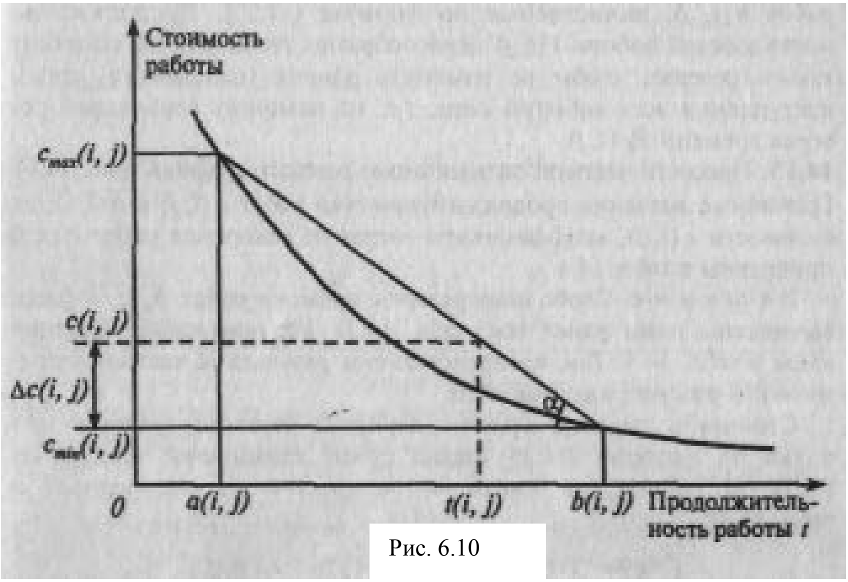

Рис. 6.10

Величина $h(i, j)$, равная тангенсу угла α наклона аппроксимирующей прямой (см. рис. 6.10), показывает *затраты на ускорение работы (i, j)* (по сравнению с нормальной продолжительностью) на единицу времени:

$$h(i, j) = tg\alpha = \frac{c_{\max}(i, j) - c_{\min}(i, j)}{b(i, j) - a(i, j)}. \tag{6.33}$$

Самый очевидный вариант частной оптимизации сетевого графика с учетом стоимости предполагает использование резервов времени работ. Продолжительность каждой работы, имеющей резерв времени, увеличивают до тех пор, пока не будет исчерпан этот резерв или пока не будет достигнуто верхнее значение продолжительности $b(i, j)$. При этом стоимость выполнения проекта, равная до оптимизации

$$C = \sum_{i, j} c(i, j), \tag{6.34}$$

уменьшится на величину:

$$\Delta C = \sum_{i,\,j} \Delta c(i,\, j) = \sum_{i,\,j} \left[b(i,\, j) - t(i,\, j) \right] h(i,\, j)\,. \qquad (6.35)$$

Для проведения частной оптимизации сетевого графика кроме продолжительности работ *t (i, j),* необходимо знать их граничные значения *a(i,j)* и *b (i, j),* а также показатели затрат на ускорение работ *h (i, j),* вычисляемые по формуле (6.33). Продолжительность каждой работы *t(i, j)* целесообразно увеличить на величину такого резерва, чтобы не изменить ранние (ожидаемые) сроки наступления всех событий сети, т.е. на величину свободного резерва времени $R_c(i, j)$.

Задача 5. Провести частную оптимизацию сетевого графика (рис. 6.4). Граничные значения продолжительностей работ *a (i,j)* и *b (i,j),* их стоимости *c (i, j)* коэффициенты затрат на ускорение работ *h (i, j)* приведены в табл. 6.4.

Решение. Свободные резервы времени работ $R_c(i, j)$ были вычислены нами ранее *(см.* табл. 6.3). Их ненулевые значения даны в табл. 6.4. Там же представлены результаты частной оптимизации рассматриваемой сети.

Стоимость первоначального варианта сетевого графика или плана по формуле (6.34) равна сумме стоимостей всех работ (включая работы, не имеющие резервов и не включенные в табл. 6.4):

C=694+50+45+...+35+10=1216 (грн).

Стоимость нового плана равна $C\text{-}\Delta C$=1216-293=923 (грн), т.е. уменьшилась почти на 25%. Новый оптимизированный сетевой график представлен на рис. 6.11. Нетрудно убедиться в том, что появились новые критические пути длиной $t_{кр}$=61 (сутки), например: $0\to1\to3\to4\to7\to10\to11$; $0\to3\to5\to8\to9\to11$; $0\to1\to3\to4\to6\to7\to10\to11$; $0\to3\to5\to6\to8\to9\to11$ и т.д.

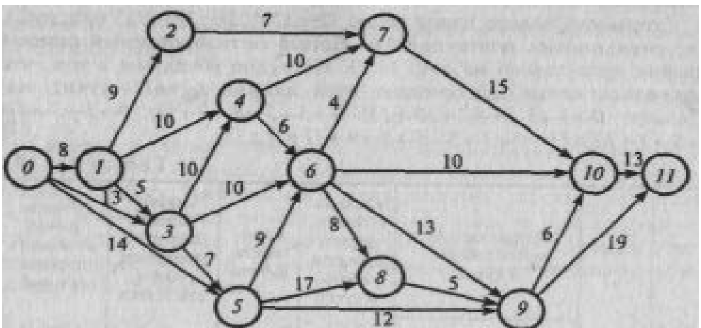

Рис. 6.11

Таблица 6.4

№ п/п	Работа	Продолжительность работы, в сутки			Свободный резерв времени работы, в сутки	Стоимость работы	Коэффициент затрат на ускорение работы, грн/сутки	Уменьшение стоимости проекта, усл. грн
	(i,j)	*a(i,j)*	*t(i,j)*	*b(i,j)*	R_c(i, j)	*c(i, j)*	*h(i, j)*	ΔC*(i, j)*
1	*2*	3	4	5	6	7	8	9
1	*(0,5)*	5	9	14	и	60	8	5·8=40
2	*(1,4)*	4	6	10	9	28	4	4·4=16
3	*(1,3)*	3	4	6	1	37	12	1·2=12
4	*(2,7)*	2	3	7	13	86	6	4·6=24
5	*(3,6)*	4	6	9	10	92	10	3·10=30
6	*(4,7)*	3	8	14	2	48	5	2·5=10
7	*(4,6)*	1	3	6	3	64	12	3·12=36
8	*(5,8)*	5	10	18	7	15	1	7·1=7
9	*(5,9)*	3	6	12	16	86	7	6·7=42
10	*(6,10)*	2	5	10	14	44	5	5·5=25
11	*(7.10)*	1	5	15	10	74	4	10·4=40
12	*(8,9)*	2	4	8	1	20	3	1·3=3
13	*(9,11)*	11	17	23	2	40	4	2·4=8
	Итого					694	-	293

Примечания:

1. В таблице представлены параметры лишь тех работ, которые имеют свободный резерв времени.

2.Стоимости *c(i, j)* остальных работ: *c(0,1)=50*; *c(0,3)=45; c(1,2)=82; c(3,4)=55; c (3,5)=72; c(5,6)=30*; *c (6,7)=26; c (6,9)=75; c (6,8)=42*; *c(9,10)=35*; *c(10,1I)=10* (грн.).

3.Подчеркнуты те работы, свободные резервы времени которых полностью использованы на увеличение их продолжительности.

Можно показать, что в этом варианте сетевого графика из 64 полных путей 28 – критические. Если бы верхние границы продолжительностей работ дали возможность полностью использовать резерв времени всех работ, представленных в табл. 6.4, то в новом плане все полные пути были бы критические.

Итак, в результате оптимизации сети мы пришли к плану, позволяющему выполнить комплекс работ в срок $t_{кр}=61$ (сутки) при минимальной его стоимости C =923 (грн.).

В реальных условиях выполнения проекта может потребоваться ускорение его выполнения, что, естественно, отразится на стоимости проекта: она увеличится. Поэтому необходимо определить оптимальное соотношение между стоимостью проекта C и продолжительностью его выполнения $t= t_{кр}$, представленное, например, в виде функции $C = C(t)$. Для оптимизации сетей и, в частности, для нахождения функции $C(t)$ могут быть использованы *эвристические методы,* т.е. методы, учитывающие индивидуальные особенности сетевых графиков. Оптимизировать сетевой график, изображенный на рис. 6.12, в котором указаны максимально возможные продолжительности работ (в сутках). Необходимые для оптимизации исходные данные представлены в табл. 6.5.

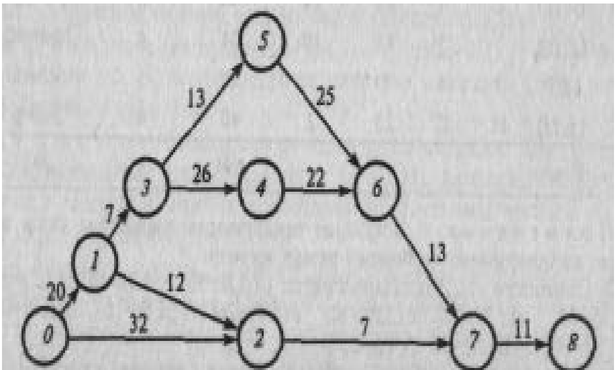

Рис. 6.12

Таблица 6.5

№ п/п	Работа (i,j)	Продолжительность работы, сутки		Коэффициент затрат на ускорение работы $h(i, j)$	Стоимость работы, грн $C=(i, j)$ при $t(i, j)= b(i, j)$
		минимальная $a(i, j)$	максимальная $b(i, j)$		
1	$(0,1)$	10	20	6	35
2	$(0,2)$	12	32	3	50
3	$(1,2)$	2	12	3	15
4	$(1,3)$	2	7	8	10
5	$(2,7)$	2	7	3	10
6	$(3,4)$	16	26	2	50
7	$(3,5)$	8	13	6	15
8	$(4,6)$	12	22	4	40
9	$(5,6)$	20	25	4	30
10	$(6,7)$	8	13	5	25
11	$(7,8)$	6	11	9	20
	Итого:				300

Решение. Исходный для оптимизации план (см. рис. 6.12) имеет максимальную продолжительность работ $t(i, j)=b(i, j)$ и соответственно минимальную стоимость С=300 (грн). Найдем все полные пути сетевого графика.

Их четыре:

L_1 $0\to1\to3\to5\to6\to7\to8$ продолжительностью $t(L_1)=89$ (суток);

L_2 $0\to1\to3\to4\to6\to7\to8$ продолжительностью $t_{кр}= t(L_2)=99$ (суток);

L_3 $0\to1\to2\to 7\to8$ продолжительностью $t(L_3)=50$ (суток);

L_4 $0\to2\to7\to8$ продолжительностью $t(L_4)=50$ (суток).

Для удобства дальнейших расчетов представим эти пути графически в виде цепочек работ (рис. 6.13), в которых цифры над стрелками показывают коэффициенты затрат на ускорение работ $h(i, j)$, а под стрелками — максимально возможные величины уменьшения продолжительности работ $\Delta t(i,j) = b(i,j) - a(i,j)$.

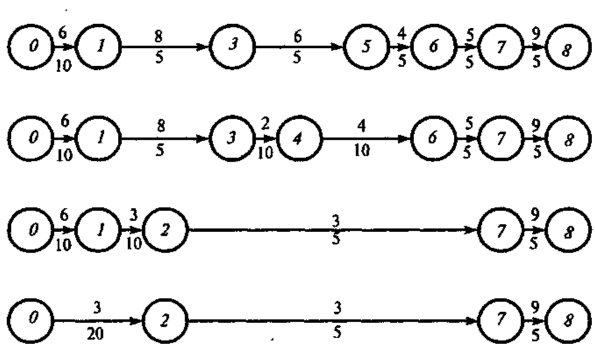

Рис.6.13

I шаг. Уменьшить продолжительность выполнения комплекса можно, как известно, только за счет сокращения продолжительности работ критического пути $t_{кр}=t(L_2)$. Из работ критического пути L_2 наименьший коэффициент затрат на ускорение $h(i, j)$ имеет работа $(3,4)$: $h_{min}(i,j)=min\{h(0, 1); h(1, 3); h(3, 4); h(4, 6); h(6, 7); h(7, 8)\}=min\{6;$ 8; 2; 4; 5; 9}=2, т.е. $t_{min}(i, j)=h(3, 4)=2$. Продолжительность работы $t(3,4)$ можно сокращать не более чем на 10 суток. При этом изменится длина только критического пути (с 99 до 89 суток) L_2 — единственного из четырех путей, проходящего через работу $(3,4)$. А стоимость проекта за счет ускорения работы $(3,4)$ с учетом формул (14.34) и (14.35) возрастет до 300+2·10=320 (грн). Итак, на 1 шаге:

$$C = 300 + 2\cdot(99\text{-t}),$$

где $89\leq t\leq 99$;

Новые длины путей равны $t\,(L_1)=t\,(L_2)=89;\ \ t(L_3)=t(L_4)=50$.

II шаг. Теперь мы имеем два критических пути – L_1 и L_2, и сократить срок выполнения проекта можно за счет одновременного сокращения их продолжительности. Сократить одновременно $t(L_1)$ и $t(L_2)$ можно, уменьшив продолжительность работ, лежащих на этих путях (см. рис. 6.13): либо $t(0, I)$, либо $t(6, 7)$, либо $t(7, 8)$. Останавливаемся на $t(6, 7)$, поскольку при этом обеспечивается минимум затрат на ускорение работы:

$$h_{min}(i, j)=min\{h(0, 1); h(1, 3); h(6, 7); h(7, 8)\}=min\{6; 8; 5; 9\}=5.$$

Продолжительность работы $t\ (6, 7)$, можно уменьшить не более чем на 5 суток. На эту величину уменьшатся длины критических путей $t(L_1)$ и $t(L_2)$, а следовательно, и срок выполнения проекта $t=(L_1)= (L_2)$. При этом стоимость проекта увеличится с 320 до 320+5·5=345 (грн). Итак, на II шаге:

$$C=320+5\cdot(89\text{-}t),\ \text{где}\ 84\leq t \leq 89;\ t(L_1)=t(L_2)=84,\ t(L_3)=t(L_4)=50.$$

Продолжая аналогичным образом сокращать продолжительность работ, получим:

III шаг. $h_{min}(i, j) = min\{h(0, 1); h(I, 3); h(7, 8) = min\{6; 8; 9\}$ = 6, т.е. $h_{min}(i, j)=h(0, 1)=6$. Сокращая продолжительность работы $t(0, I)$ до 10 суток, найдем:

$$C = 345+6\text{-}(84\text{-г}),$$

где $74 \le t \le 84$;

$$t(L_1)=t(L_2)=74, \ t(L_3)=40; \ t(L_4)=50.$$

IV шаг. $h_{min}(i, j) = min(h(1,3),h(7,8)\}=min\{8;9\}$=8, т.е. $h_{min}(i, j)=h(1,3)=8$. Сокращая продолжительность работы $t(1, 3)$ до 5 суток, найдем:

$$C = 405+8\cdot(74\text{-}t), \text{ где } 69 \le t \le 74;$$
$$t(L_1)=t(L_2)=69, \ t(L_3)=40; \ t(L_4)=50.$$

V ш а г. Сокращая продолжительность работы $t(7,8)$ до 5 суток, найдем (учитывая, что $h(7, 8)=9$):

$$C = 445+9\cdot(69\text{-}t), \text{ где } 64\le t \le 69;$$
$$t(L_1)=t(L_2)=64; \ t(L_3)=35; \ t(L_4)=45.$$

VI шаг. Теперь несокращенными остались продолжительности трех критических работ: $t(3, 5)$ и $t(5, 6)$ критического пути L_2, каждую из которых можно сократить до 5 суток, и $t(4, 6)$ критического пути L_2, которую можно сократить до 10 суток. Сокращение какой-либо одной из названных величин не приведет к сокращению продолжительности выполнения проекта, ибо при этом сократится лишь один из двух путей, а длина несокращенного пути, который станет единственным критическим путем, не изменится. Поэтому последовательно сокращая $t(4, 6)$ и $t(5, 6)$ до 5 суток (с учетом времени сокращения продолжительности работ),найдем (теперь коэффициент затрат на ускорение работ равен $h(4, 6)+h(5, 6)$= 4+4 = 8):

$$C - 490+8\cdot(64\text{-}t), \text{ где } 59 \le t \le 64;$$
$$t(L_1)=t(L_2)=59; \ t(L_3)=35; \ t(L_4)=45.$$

VII шаг. Продолжительность работы $t(4, 6)$ можно сократить еще до 5 суток и на тот же срок можно сократить $t(3, 5)$ (иначе срок выполнения проекта не изменится). Полагая, что $h(4, 6)+h(3,5)$=4+6=10, найдем:

$$C = 530+10\cdot(59\text{-}t),$$

где $54 \le t \le 59$.

График оптимальной зависимости стоимости проекта *C(t)* от продолжительности его выполнения показан на рис. 6.14. С помощью этого графика можно, с одной стороны оценить минимальную стоимость проекта при любом возможном сроке его выполнения, а с другой — найти предельную продолжительность выполнения проекта при заданной его стоимости. Например, при продолжительности проекта *t*=79 (суток) минимальная стоимость выполнения рассматриваемого комплекса составит 375 (грн), а при стоимости выполнения комплекса, например, 540 (грн) предельная продолжительность проекта составит 55 (суток), С помощью функции *C (t)* можно оценить дополнительные затраты, связанные с сокращением сроков завершения комплекса. Так, сокращение продолжительности проекта с 79 до 55 суток потребует дополнительных затрат 540-375=165 (грн)

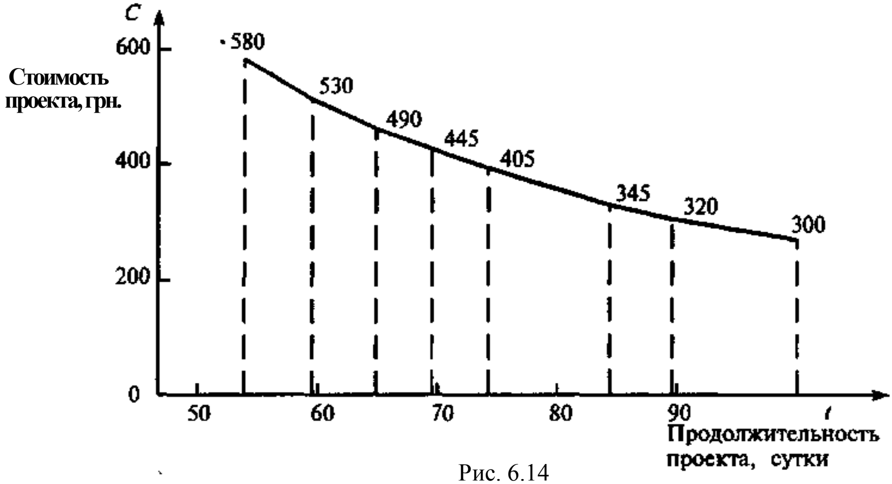

Рис. 6.14

Итак, мы рассмотрели один из возможных эвристических алгоритмов оптимизации сетевого графика. Можно было использовать и другие алгоритмы. Например, взять в качестве первоначального план, имеющий не максимальные, а минимальные значения продолжительности работ $t(i, j) = a(i, j)$ и соответственно максимальную стоимость проекта. А затем последовательно увеличивать продолжительность выполнения комплекса работ путем увеличения продолжительности работ, расположенных на некритических, а затем и на критическом (ских) пути в порядке убывания коэффициентов, затрат $h(i, j)$.

Следует заметить, что при линейной зависимости стоимости работ от их продолжительности задача построения оптимального сетевого графика может быть сформулирована как задача линейного программирования, в которой необходимо минимизировать стоимость выполнения проекта при двух группах ограничений. Первая группа ограничений показывает, что продолжительность каждой работы должна находиться в пределах, установленных неравенством (6.31). Вторая группа ограничений требует, чтобы продолжительность любого полного пути сетевого графика не превышала установленного директивного срока выполнения проекта. Однако решать такие задачи классическими методами линейного программирования, как правило, неэффективно, в связи с чем используются специально разработанные методы.

Расчет параметров сетевого графика проекта позволяет выявить критические работы, определяющие ход выполнения всего комплекса работ, продолжительность его реализации, резервы времени событий и работ и проанализировать, можно ли его использовать в качестве плана выполнения работ. Чаще всего требуется улучшение сетевого графика с учетом сроков выполнения работ и рационального использования материальных, трудовых и денежных ресурсов, т. е. требуется его оптимизация.

Вопросы и задания для самопроверки

1. Для чего нужна система сетевого планирования и управления, что она позволяет?
2. Что представляет собой сетевая модель?
3. Назовите главные элементы сетевой модели.
4. В чем заключается упорядочение сетевого графика?
5. Какой путь называют критическим?
6. Назовите параметры событий.
7. Назовите параметры пути.
8. Что вы понимаете под полным резервом времени?
9. Имеют ли резервы времени работы, лежащие на критическом пути?
10. С чего начинается анализ сетевого графика?
11. Что представляют собой частная и комплексная оптимизация?

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

По данным таблицы в соответствии с вариантом необходимо:

1) построить сетевой график;
2) построить линейную диаграмму;
3) определить критический путь, рассчитать временные параметры сетевого графика;

4) провести частичную оптимизацию сетевой модели по критерию минимизации стоимости проекта неизменяя срок реализации;
5) провести комплексную оптимизацию сетевой модели;
6) построить график зависимости стоимости проекта от времени его реализации.

Вариант 1

Работа	Нормальный план выполнения работы, сутки		Срочный план выполнения работы, сутки	
	t_{max}	c_{min}	t_{min}	c_{max}
(1,2)	4	5	2	15
(1,3)	4	3	2	11
(1,4)	12	150	9	180
(2,3)	6	11	5	30
(2,4)	7	18	6	30
(3,4)	10	10	8	20
(3,5)	24	147	19	212
(4,5)	10	4	7	25
(5,6)	3	2	2	5

Вариант 2

Работа	Нормальный план выполнения работы, сутки		Срочный план выполнения работы, сутки	
	t_{max}	c_{min}	t_{min}	c_{max}
(1,2)	5	6	3	16
(1,3)	5	4	3	12
(1,4)	13	151	10	181
(2,3)	7	12	6	31
(2,4)	8	19	7	31
(3,4)	11	11	9	21
(3,5)	25	148	20	213
(4,5)	11	5	8	26
(5,6)	4	3	3	6

Вариант 3

Работа	Нормальный план выполнения работы, сутки		Срочный план выполнения работы, сутки	
	t_{max}	c_{min}	t_{min}	c_{max}

(1,2)	12	6	4	60
(1,3)	12	4	4	44
(1,4)	36	151	11	720
(2,3)	18	12	7	120
(2,4)	21	19	8	120
(3,4)	30	11	10	80
(3,5)	72	148	21	848
(4,5)	30	5	9	100
(5,6)	9	3	4	20

Вариант 4

Работа	Нормальный план выполнения работы, сутки		Срочный план выполнения работы, сутки	
	t_{max}	c_{min}	t_{min}	c_{max}
(1,2)	6	7	4	17
(1,3)	6	5	4	13
(1,4)	14	152	11	182
(2,3)	8	13	7	32
(2,4)	9	20	8	32
(3,4)	12	12	10	22
(3,5)	26	149	21	214
(4,5)	12	6	9	27
(5,6)	5	4	4	7

Вариант 5

Работа	Нормальный план выполнения работы, сутки		Срочный план выполнения работы, сутки	
	t_{max}	c_{min}	t_{min}	c_{max}
(1,2)	8	10	4	30
(1,3)	8	6	4	22
(1,4)	24	300	18	360
(2,3)	12	22	10	60
(2,4)	14	36	12	60
(3,4)	20	20	16	40
(3,5)	48	294	38	424
(4,5)	20	8	14	50
(5,6)	6	4	4	10

Вариант 6

Работа	Нормальный план выполнения работы, сутки		Срочный план выполнения работы, сутки	
	t_{max}	c_{min}	t_{min}	c_{max}
(1,2)	12	15	6	45
(1,3)	12	9	6	33
(1,4)	36	200	27	360
(2,3)	18	33	15	90
(2,4)	21	54	18	90
(3,4)	30	30	24	64
(3,5)	72	294	57	424
(4,5)	30	12	21	75
(5,6)	9	6	8	15

Вариант 7

Работа	Нормальный план выполнения работы, сутки		Срочный план выполнения работы, сутки	
	t_{max}	c_{min}	t_{min}	c_{max}
(1,2)	8	10	4	17
(1,3)	8	6	4	13
(1,4)	24	150	11	302
(2,3)	12	22	7	32
(2,4)	14	36	8	52
(3,4)	20	20	10	120
(3,5)	48	194	21	101
(4,5)	20	8	9	27
(5,6)	6	4	4	7

Вариант 8

Работа	Нормальный план выполнения работы, сутки		Срочный план выполнения работы, сутки	
	t_{max}	c_{min}	t_{min}	c_{max}
(1,2)	10	12	6	32
(1,3)	10	8	6	24
(1,4)	26	151	20	181
(2,3)	14	24	12	31
(2,4)	16	38	14	62

(3,4)	22	23	18	31
(3,5)	50	148	40	213
(4,5)	22	10	16	26
(5,6)	8	6	7	12

Вариант 9

Работа	Нормальный план выполнения работы, сутки		Срочный план выполнения работы, сутки	
	t_{max}	c_{min}	t_{min}	c_{max}
(1,2)	12	14	8	34
(1,3)	14	10	7	26
(1,4)	28	152	23	182
(2,3)	16	26	13	32
(2,4)	18	40	14	30
(3,4)	24	24	19	39
(3,5)	52	147	43	213
(4,5)	24	12	22	31
(5,6)	12	14	8	34

Вариант 10

Работа	Нормальный план выполнения работы, сутки		Срочный план выполнения работы, сутки	
	t_{max}	c_{min}	t_{min}	c_{max}
(1,2)	16	20	8	60
(1,3)	16	12	8	44
(1,4)	48	600	36	720
(2,3)	24	44	20	120
(2,4)	28	78	24	120
(3,4)	40	40	32	80
(3,5)	96	588	76	848
(4,5)	40	16	28	100
(5,6)	12	8	8	20

7. ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В МЕНЕДЖМЕНТЕ И МАРКЕТИНГЕ

7.1. Анализ безубыточности

Существуют различные типы затрат, которые несет любая организация в процессе ведения хозяйственных операций, и классифицируют их как постоянные, переменные и полупеременные. При определении оптимального набора ресурсов менеджер сталкивается с необходимостью проанализировать соотношение между этими затратами и объемом реализации продукции компании и ее прибылью. С этой целью используется метод *анализа безубыточности*.

Этот метод предполагает сопоставление совокупных затрат с объемом выручки от реализации для целого ряда значений объема продаж. В рамках подобного анализа исследуются соотношения между постоянными и переменными затратами, объемом продаж или выручкой и прибылью.

Необходимо определить *точку безубыточности,* которая является таким объемом продаж или выручкой от продаж, при которой совокупные затраты эквивалентны совокупной выручке. Иными словами, это уровень продаж, при котором компания не получает ни прибыли, ни убытков.

Пример 7.1

Планируется открыть школу-студию танцев с тренажерным залом, сауной и специальным залом для занятий аэробикой в центре Киева.

Первоначальные затраты составляют:

Обновление и перестройка помещения	30000 грн
Тренажеры для поддержания формы	10000 грн
Оборудование для сауны	5000 грн

Затраты на перестройку помещения и оборудование будут амортизированы в течение шестилетнего периода на основе метода равномерного начисления износа и предположения, что в конце этого периода остаточная стоимость этих внеоборотных средств будет равна нулю.

Периодические ежегодные затраты составят:

Ремонт и обеспечение	3000 грн
Страховка	4000 грн

Затраты на оплату труда персонала будут колебаться в зависимости от спроса на услуги школы-студии. Ожидается, что они составят в среднем 100 грн на одного ученика в год, а ежегодная персональная плата за занятия – 150 грн.

Сколько нужно ежегодно принимать учеников, чтобы бизнес стал приносить прибыль.

Первоначальные затраты капитала составляют 45000 грн и будут списаны на износ в течение шести лет с нулевой остаточной стоимостью, что означает ежегодное начисление износа в размере 7500 грн.

Таким образом, ежегодные постоянные затраты следующие (табл. 7.1):

Таблица 7.1

Школа-студия

	Грн
Амортизация	7500
Обслуживание и ремонт оборудования	3000
Страховка	4000
Всего	14500

Единственная статья переменных затрат – оплата труда персонала в размере 100 грн в год на одного ученика.

Выручка составляет 150 грн в год с ученика. За каждого дополнительного ученика, выручка превысит переменные затраты на 50 грн: 150 – 100 = 50 (грн) Это называется «удельная прибыль» (вкладом ед. продукции). В целом определение этого термина звучит так:

удельная прибыль = цена реализации ед. продукции – переменные затраты на ед. продукции.

$$\text{Точка безубыточности } (\text{ед.продукции}) = \frac{\text{совокупные постоянные затраты}}{\text{удельная прибыль}}$$

$$\text{Точка безубыточности } (\text{грн}) = \text{точка безубыточности } (\text{ед. продукции}) \times$$
$$\times \text{цена реализации}$$

Для школы-студии расчет точки безубыточности выглядит так:

$$\text{Точка безубыточности } (\text{ед. продукции}) = \frac{14500\,\text{грн}}{50\,\text{грн}} = 290\ \text{учеников}$$

$$\text{Точка безубыточности } (\text{грн.}) = 290 \times 150\ \text{грн.} = 43500\ \text{грн.}$$

Таким образом, бизнес станет безубыточным, если будет обучаться 290 учеников в год, и что это эквивалентно выручке от продажи в размере 43500 грн.

Задание 7.1

Компания «Брейкен Лимитед» производит садовые гномики и продает по 4 грн за штуку. Затраты компании составляют:

	Грн
Себестоимость материалов	2 на ед. продукции
Арендная плата за производственное помещение	3000 в год
Налоги и платежи	2000 в год
Хранение и транспортировка	0,5 за единицу

Сколько гномиков должна продать компания «Брейкен» за год, чтобы ее бизнес был безубыточным? Каким должен быть при этом объем продаж?

Задание 7.2

Рассчитайте прибыль (убытки) школы-студии, если ежегодное число учеников составит:

а) 250 учеников

б) 400 учеников.

Использование анализа безубыточности для сопоставления альтернативных стратегий бизнеса

Задание 7.3

Школа-студия танцев работает уже год, и число учеников составило 400 чел. Тем временем идея такой школы стала популярной, и месяц назад двумя кварталами ниже была открыта аналогичная фитнесс-студия - гимнастический зал.

Как понятно из предыдущих условий, для структуры затрат школы-студии характерны относительно низкие постоянные затраты, поскольку у нее громоздкое стационарное оборудование. Политика школы-студии заключается в том, чтобы привлекать к занятиям, главным образом, высококачественным индивидуальным обслуживанием при помощи сверхвнимательного квалифицированного персонала.

У фитнесс-студии другая стратегия. В гимнастическом зале множество современнейших тренажеров с электронными датчиками и табло, которые автоматически отражают получаемую физическую нагрузку. Таким образом, внимания персонала к клиентам требуется значительно меньше. Правда, высокими были первоначальные затраты на оборудование – 150000 грн (по плану используется метод равномерного начисления износа в течение шести лет, после чего остаточная стоимость оборудования будет равна нулю). Затраты на обслуживание составляют 4000 грн в год, а расходы на страховку такие же, как у школы танцев. Переменные издержки находятся на достаточно низком уровне – 56 грн в год на одного клиента. Плата за занятия в фитнесс-студии такая же, как в школе-студии Марии – 150 грн в год с человека.

Используя анализ безубыточности, рассчитайте точку безубыточности для гимнастического зала. Сопоставьте и сравните действенность стратегий обеих студий.

Не существует какого-то одного метода принятия решений при организации бизнеса. Поэтому при оценке альтернативных стратегий ведения бизнеса или при сопоставлении положения конкурирующих компаний необходимо принимать во внимание два элемента: постоянные затраты и удельная прибыль.

• При высоком уровне постоянных затрат велик риск убытков, если не будет достигнут запланированный объем продаж.

• При высоком удельном вкладе существует возможность получения высокой прибыли, поскольку постоянные затраты уже покрыты.

Ограничения анализа безубыточности

Анализ безубыточности является весьма полезным инструментом на ранней стадии принятия решений, когда важно получить общий взгляд на бизнес. Однако вы должны иметь в виду, что в основе этого анализа лежит ряд допущений, которые могут и не быть верными в каждом практическом случае. Они заключаются в следующем:

• Все затраты должны быть идентифицированы и классифицированы как постоянные или переменные. На практике это не всегда возможно, так как могут возникнуть непредвиденные затраты, так что некоторые их виды непросто идентифицировать.

• Все переменные затраты прямо пропорциональны объему продаж. Однако на деле затраты могут увеличиться или уменьшиться, например, если на работу принимают еще одного работника или закупают минимальное количество сырья.

• Номенклатура товара постоянна. Не допускаются предположения о возможном браке и порче товара. Предполагается, что все произведенное или закупленное продается. Однако товары не всегда остаются одинаковыми. В пределах каждой хозяйственной операции они могут претерпеть усушку, утруску и т.д.

• Вся система находится в стабильном состоянии. Дело в том, что анализ безубыточности не может учесть эффект масштаба. Первоначально, когда новый продукт или услуга только «запускаются в производство», необходимо время, чтобы персонал полностью обучился, приобрел опыт и начал работать более эффективно, чем вначале. Это так называемая *кривая роста производительности* (т.е. время на изготовление единицы продукции снижается). В данной ситуации переменные издержки в расчете на единицу продукции изменяются до того момента, пока производство не достигнет полной мощности и производственная система не придет в состояние стабильности.

• Анализ безубыточности основывается на прогнозах затрат и доходов. Несмотря на улучшение наших навыков в прогнозировании, всегда могут иметь место непредвиденные обстоятельства, существенно нарушающие прогнозные показатели.

Задание 7.4

Школа-студия стала ощущать конкуренцию со стороны гимнастического зала. Учеников стало на 20% меньше, чем за тот же месяц прошлого года, когда общее число учеников за год составило 400. Одна из возможностей поправить дело – более эффективное использование одной из комнат помещения, которая сейчас отведена под кладовую. Эту комнату можно сдать в субаренду и получать 150 грн в неделю.

Альтернативный курс действий – превращение этой комнаты в массажный кабинет, но для этого необходимо нанять квалифицированный персонал, ежегодные расходы на который составят 9000 грн, и вложить 1800 грн в дополнительное оборудование. Ожидается, что для клиентов будет установлена плата 10 грн за получасовой сеанс массажа с получасовым периодом релаксации. Переменные затраты составят 1,5 грн за один сеанс.

Третий альтернативный вариант – отвести часть помещения под бассейн. Опыт лучших спортивных клубов и гимнастических залов показывает его популярность. Первоначальные инвестиции в этом случае составят 30000 грн на оборудование (бассейн, стальное укрепление для пола, декорирование). Плата составит 20 грн с клиента за сеанс длительностью в один час. Расходы на дополнительный персонал и на уборку составят 100 грн в неделю. Переменные издержки оцениваются в 2,5 грн с клиента.

Используя анализ безубыточности, оцените все эти предложения и определите наиболее эффективный вариант стратегии. Считайте, что новые спортивно-оздоровительные мероприятия будут продолжаться 60 часов в неделю и 50 недель в году. Амортизация оборудования будет осуществляться на основе метода равномерного начисления износа в течение шести лет, после чего его остаточная стоимость будет равна нулю.

7.2. Анализ чувствительности

Поскольку возможно множество различных ситуаций, в которых мы хотели бы оценить влияние на хозяйственную деятельность изменений наших первоначальных планов, то представляется целесообразным создать в электронных таблицах шаблон, позволяющий легко оценивать альтернативные варианты без нудных повторяющихся расчетов.

Анализ безубыточности проводится на основе наиболее вероятного сценария динамики затрат, доходов и объемов производства. Затем проводим *анализ чувствительности,* учитывая действие всех факторов, которые, по мнению менеджеров, могут повлиять на анализ. Каждый раз рассматриваем одно какое-либо изменение первоначального сценария и оцениваем влияние этого изменения на точку безубыточности и прибыль. Таким образом, можно получить общее представление о том, насколько велико будет влияние на проект, скажем, ценовых решений или снижения рыночной конъюнктуры и лучше выявить финансовые риски, сопряженные с данным проектом.

Анализ чувствительности также называется анализом *«А что, если...?»,* поскольку он оценивает возможность наступления вероятных в будущем обстоятельств и их влияние на проект в результате применения различных методов принятия решений.

В контексте анализа безубыточности это означает, что анализ чувствительности можно проводить для оценки возможных последствий в случае изменения:

- цен реализации;
- постоянных затрат;
- переменных издержек;
- объема продаж.

7.3. Принятие долгосрочных инвестиционных решений

Временная ценность денег

Экономический рост в переходной экономике и повышение конкурентоспособности должны подкрепляться инвестиционной активностью. В действительности темпы роста валового внутреннего продукта (ВВП) и конечного потребления. Инвестиции являются наиболее динамичным компонентом ВВП, т.к. подвержены различной степени рискам и инфляции.

Прогнозирование денежных потоков и принятие решений по эффективному инвестированию на различных уровнях предполагает *временную* оценку денег. Методические аспекты финансово-экономических расчетов изложены в работах Е.М. Четыркина [14], В.В. Ковалева [4], ЕС. Стояновой[11] и других авторов по финансовому менеджменту.

Фактор времени, особенно в долгосрочных расчетах и операциях, играет не меньшую роль, чем размеры денежных сумм. Необходимость учета этого фактора определяется самой сущностью процесса финансирования и кредитования и выражается в виде принципа неравноценности денег, относящихся к разным моментам времени.

Действительно, даже если отвлечься от инфляции и риска, 1000 грн, полученные через пять лет, неравноценны сегодняшним 1000 грн. Неравноценность этих номинальных сумм денег определяется прежде всего тем, что теоретически любая сумма может быть инвестирована и, соответственно, может принести доход. Поступившие доходы в свою очередь могут быть реинвестированы и также принесут доходы и т.д.

Следствием принципа неравноценности является неправомерность простого суммирования денежных величин, относящихся к разным моментмам времени, в процессе экономического анализа и прогнозирования.

Финансовые вычисления исходят из процессов наращения и дисконтирования. В первом случае задана исходная сумма и процентная ставка, во втором случае – возращаемая сумма и коэффициент дисконтирования.

Процентная ставка (процент, норма доходности, ставка процента) представляет коэффициент прироста и рассчитывается следующим образом:

$$r(t) = \frac{FV - PV}{PV}, \qquad (7.1)$$

где *FV (future value)* – будущая стоимость, *PV (present value)* – настоящая (текущая, приведенная) соимость.

Коэффициент дисконтирования (дисконт, ставка дисконтирования) представляет коэффициент снижения и определяется следующим образом:

$$r(t) = \frac{FV - PV}{PV}, \qquad (7,2)$$

Различия между двумя коэффициентами заключается в том, что в первом случае базой сравнения является исходная сумма, во втором случае – возвращаемая, наращенная сумма. Ставки процента и дисконта могут измеряться в процентах, в виде десятичной или натуральной дроби (с точностью, например, до 1/32).

В финансовых расчетах приходиться решать задачи, обратные определению наращенной суммы PV по заданной сумме FV, которую следует уплатить через некоторое время. Аналогичная задача решается, когда проценты с суммы FV удерживаются непосредственно при выдаче ссуды. Процесс начисления и удержания процентов вперед называется *учетом*, а проценты в виде разности $D = FV - PV$ называют дисконтом.

Необходимость дисконтирования возникает при покупке финансовым учреждением краткосрочных обязательств, например, векселей, оплата которых должником будет проводиться в будущем.

Термин «дисконтирование» употребляется и в более широком смысле – как средство определения любой стоимостной величины на некоторый момент времени при условии, что в будущем она составит величину FV, вне зависимости от того, действительно ли имела место финансовая операция, предусматривающая начисление процентов, или нет. Такой расчет называют приведением стоимостного показателя к заданному моменту времени, а величину PV, найденную дисконтированием FV, называют современной или приведенной величиной. Это понятие является одним из важнейших в современном количественном анализе финансовых операций, поскольку именно с помощью дисконтирования учитывается такой фактор, как время.

Понятие простого и сложного процента

Различие простых и сложных процентных ставок связано с выбором исходной базы для начисления процентов. Если ставка процентов применяется к одной и той же начальной сумме на протяжении всего срока ссуды, то используемая ставка называется простой.

Пусть P – первоначальная сумма, i - ставка процентов в виде десятичной дроби, S - наращенная сумма, I - проценты за весь срок. Изменение суммы долга с начисленными простыми процентами на одну и ту же исходную сумму P описывается арифметической прогрессией:

$$\begin{aligned} &P; P + Pi = P(1+i); P(1+i) + Pi = P(1+2i)... \\ &S = P + I = P(1+ni); I = Pni \end{aligned} \qquad (7.5)$$

$(1+ni)$ - множитель наращения при начислении простых процентов.

Таким образом, сумма долга при простом проценте линейно зависит от процентной ставки. Графически это будет иметь вид (ряд 3)(рис. 7.1):

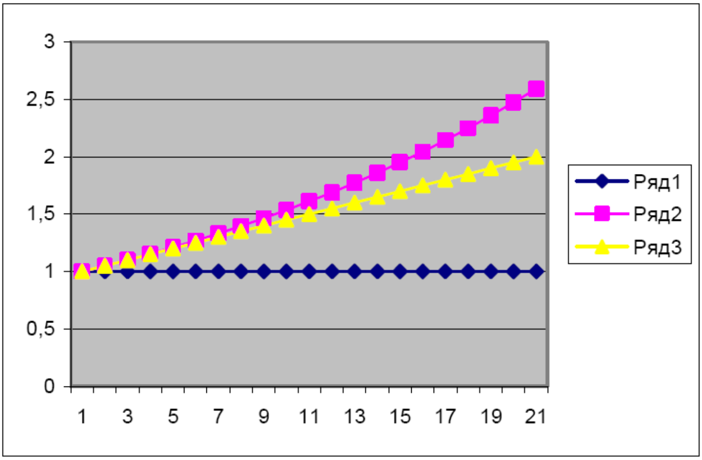

Рис. 7.1. Множители наращения по равным сложной и простой ставке

При начисления по сложной процентной ставке база увеличивается с каждым шагом во времени. Наращение по сложным процентам можно представить как последовательное реинвестирование средств, вложенных под простые проценты, на один период начисления. Присоединение начисленных процентов к сумме, которая служила базой для их определения, называется капитализацией процентов.

Изменение суммы долга в данном случае представляет геометрическую прогрессию:

$$P + Pi = P(1+i); (P + pi) + (P + Pi)i = P(1+i)(1+i) = P(1+i)^2; ...P(1+i)^n$$

$$S = P(1+i)^n \qquad (7.6)$$

$(1+i)^n$ - множитель наращения при начислении сложных процентов.

Соотношение значений множителей наращения по равным простой и сложной процентным ставкам и одинаковой абсолютной величине зависит от срока ссуды. Для срока менее 1 года $1 + ni_{пр} > (1+i_{сл})^n$, а для срока более 1 года $1 + ni_{пр} < (1+i_{сл})^n$.

Исходя из вида процентной ставки, различают *математическое дисконтирование и банковский коммерческий учет. Математическое дисконтирование* представляет решение задачи, обратной наращению первоначальной суммы ссуды, депозита и т.д.: какую первоначальную сумму надо выдать в долг, чтобы при начислении на нее процентов по ставке *r* к концу срока получить наращенную сумму, равную *S*. Решив уравнение (7.5) относительно *P*, получим:

$$P = S\frac{1}{1+nr}, n = \frac{t}{k};$$

$\frac{1}{1+nr}$ - дисконтный множитель, показывающий какую долю составляет *P* в величине *S*. Разность *S-P* можно рассматривать не только как проценты, начисленные на *P*, но и как дисконт суммы *S*.

При *банковском учете* банк или другое финансовое учреждение до наступления срока платежа по векселю или другому платежному обязательству, покупает его у владельца по цене, меньшей той сумм, которая должна быть выплачена по нему в конце срока, т.е. приобретает или учитывает его с дисконтом.

Владелец векселя с помощью его учета имеет возможность получить деньги ранее указанного на нем срока. При учете векселей применяется банковский или коммерческий учет. Согласно этому методу проценты за пользование ссудой начисляются на сумму, подлежащую уплате в конце срока ссуды. При этом применяется учетная ставка *d*. Простая годовая учетная ставка находится как *d=(S-P)/S*, в то время как простая ставка процентов *r=(S-P)/P*. Отсюда *P=S(1-nd)*, где *(1-nd)* – дисконтный множитель, n- продолжительность срока в годах от момента учета до даты уплаты по векселю.

Учетная ставка отражает фактор времени более жестко. При $n \geq I / d$ величина P станет отрицательной, чего не может случиться при математическом дисконтировании; при любом сроке современная стоимость >0.

Учет инфляции при принятии решений

В условиях инфляции деньги обесцениваются и реальный эквивалент наращиваемой за год суммы $S=P(1+i)$ составит величину $S_r = P\frac{(1+i)}{(1+r)}$, где r – годовой темп инфляции. В результате реальная ставка процентов составит

$$i_r = \frac{S_r - P}{P} = \frac{i-r}{1+r}. \tag{7.7}$$

При достаточно большом r ставка процентов i_r может стать даже отрицательной. В таких случаях кредитор работает себе в убыток, а заемщик обогащается. Чтобы выровнять условия, следует компенсировать обесценивающее влияние индекса цен $\rho = 1 + r$. Этого можно достичь, опираясь на наращение по ставке j, определяемой из условия:

$$(1+j) = (1+i)(1+r)\text{, то есть } j = i + r + ir. \tag{7.8}$$

При невысокой инфляции величины i и r незначительны, и их произведением в формуле (7.8) можно пренебречь. В этом случае поправка на инфляцию ограничивается величиной темпа r, и ставку корректируют по формуле $j=i+r$.

Оценка инвестиционных процессов

Инвестиционный процесс представляет последовательность распределенных во времени взаимосвязанных инвестиций (вложений) и поступлений (отдачи). Данный процесс характеризуется двусторонним потоком платежей, положительные члены которого соответствуют доходной части, а отрицательные – вложениям, необходимым для осуществления инвестиционного проекта.

Для определения суммарного дохода платежей с учетом их временной неравноценности находится алгебраическая взвешенная сумма, в которой весами являются множители наращения каждого платежа на определенную дату в будущем.

Вопрос о выборе ставки начисления процентов, входящей в весовые коэффициенты, решается в зависимости от имеющихся альтернатив использования денежного капитала, например, внесение средств на депозит банка по ссудному проценту. Ввиду однозначной математической связи наращения с дисконтированием за базовую оценку потока платежей можно принять и алгебраическую сумму дисконтированных платежей на какой-либо прошлый момент времени.

Если за P_k обозначить сумму дохода, прогнозируемого к получению в *k*-том году, то суммарная текущая (приведенная) стоимость *PV* будет определяться следующим образом:

$$PV = \sum_{k=1}^{n} \frac{P_k}{(1+r)^k},$$

где r – коэффициент дисконтирования. Критериями выбора инвестиционного проекта являются:

- NPV>0, т.е. чистая (за вычетом потоков инвестиций) приведенная стоимость $NPV = \sum_{k=1}^{n} \frac{P_k}{(1+r)^k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{I_{k-1}}{(1+r)^{k-1}}$ должна быть положительной;

- индекс рентабельности *R*>1, $R = \sum_{k=1}^{n} \frac{P_k}{(1+r)^k} \div \sum_{k=1}^{n} \frac{I_{k-1}}{(1+r)^{k-1}}$;

- внутренняя норма рентабельности (Internal Rate of Return) *IRR* должна обеспечивать прибыльность проекта с учетом средневзвешенной цены капитала.

Расчет можно выполнить методом последовательных итераций с использованием табулированных значений дисконтирующих множителей. С помощью таблиц выбираются два значения коэффициента дисконтирования $r_1 < r_2$ таким образом, чтобы в интервале (r_1, r_2) функция $NPV = f(r)$ меняла свое значение с «+» на «-» или с «-» на «+».

Расчет производится по формуле:

$$IRR = r_1 + \frac{f(r_1)}{f(r_1) - f(r_2)} \cdot (r_2 - r_1), \qquad (7.9)$$

где r_1 - значение коэффициента дисконтирования, при котором $f(r_1) > 0 (f(r_1) < 0)$; r_2 - значение коэффициента дисконтирования, при котором $f(r_1) < 0 (f(r_1) > 0)$.

Пример 7.2

Компания «Металлолом Джорджа» («МД») располагает разбитым автомобилем, от которого необходимо избавиться. У компании есть соответствующие предложения, касающиеся распоряжения автомобилем, от трех других компаний. Вот эти предложения.

• «Альфа», компания по переработке

Сумма 3100 грн выплачивается единовременно через три года.

• «Браво», компания по реализации

Сумма 1000 грн выплачивается немедленно, затем в течение трех лет 600 грн выплачиваются в конце каждого года.

• Компания Чарли «Автомобили по бросовым ценам». Сумма 2500 грн выплачивается немедленно.

Какое из этих предложений должна принять компания «МД», если текущая ставка дисконта составляет 5% годовых и сложный процент начисляется ежегодно?

Для ответа на этот вопрос нам необходимо сопоставить текущую стоимость трех предложенных методов оплаты путем *дисконтирования* сумм, которые будут получены в будущем.

Компания по переработке «Альфа»

Применим формулу для определения текущей стоимости:

$$PV = 3100 \text{ грн.}/(1+0{,}05)^3 = 2677{,}9 \text{ грн.}$$

Компания по реализации «Браво».

Поскольку здесь необходимо рассчитать стоимость нескольких сумм, проще составить таблицу (см. табл. 7.2).

Таблица 7.2

Схема выплат компании «Браво»

Срок	Платеж, грн	Текущая стоимость, грн
Сейчас	10000	10000
В конце первого года	6000	5714
В конце второго года	6000	5442
В конце третьего года	6000	5183
		Итого: 26339

Обратите внимание, что текущая стоимость была рассчитана по вышеприведенной формуле, а именно:

- PV 600 грн, через один год = 600 грн/(1+ 0,05);
- PV 600 грн, через два года = 600 грн/$(1 + 0{,}05)^2$;
- PV 600 грн, через три года = 600 грн/$(1 + 0{,}05)^3$.

В целом в рамках данного предложения текущая стоимость составляет 2633,9 грн.

Компания Чарли «Машины по бросовым ценам»

Текущая стоимость составляет 25000 грн.

Сравним полученные результаты и сделаем вывод, что предложение компании «Альфа» предполагает самую высокую текущую стоимость, и поэтому оно является самым привлекательным. Его и примет «МД». Однако существуют некоторые оговорки. «МД» не получит какой-либо оплаты от «Альфы» до истечения трех лет после заключения сделки. А что, если «Альфа» прекратит свое существование или обанкротится? Возможно, компания «МД» именно сейчас нуждается в средствах, тогда он примет одно из предложений, предусматривающих немедленную оплату. Кроме того, наши расчеты не учитывали инфляцию. Если мы рассчитаем возможный темп инфляции, то можем произвести аналогичные подсчеты для внесения поправки на падение курса гривны.

Таким образом, расчет текущей стоимости может использоваться как отправной пункт для принятия решений, поскольку он позволяет сопоставлять суммы средств, следующие к получению в различные периоды времени в будущем. Вместе с тем крайне важно принимать во внимание другие, нефинансовые соображения, которые обычно учитываются в общем процессе выработки решении.

Задание 7.5

Рассчитайте, каким будет будущее значение суммы 5000 грн, если она будет инвестирована на два года на следующих условиях:

а) под сложный процент, начисляемый один раз в год, ставка процента – 5%;

б) из расчета 5% годовых сложный процент начисляется каждые шесть месяцев;

в) из расчета 5% годовых, причем сложный процент начисляется каждый квартал.

Задание 7.6

Компания «Светлая контора» разработала проект переоборудования своих офисов, рассчитанный на три года. Совет директоров получил три предложения по схеме финансирования данного проекта от компании-подрядчика:

(а) Предложение 1

Оплатить 200000 грн немедленно.

(б) Предложение 2

Оплатить немедленно 50000 грн, в конце первого года реализации проекта – 60000 грн, в конце второго года реализации – 70000 грн, в конце третьего года – 80000 грн.

(в) Предложение 3

Оплатить 290000 грн в конце третьего года с момента начала реализации проекта.

Какой вариант оплаты должна выбрать компания, если текущая ставка дисконтирования составляет 7% годовых?

Внутренняя норма рентабельности

Выполняя приведенные выше расчеты и упражнения, вы, наверное, заметили, что критически важной для них является ставка дисконта.

Пример 7.3

Первоначальная инвестиция в размере 450 тыс. грн, как ожидается, обеспечит положительные потоки денежных средств в размере 115 тыс. грн, 135 тыс. грн, 145 тыс. грн и 160 тыс. грн в конце последующих четырех лет соответственно. Как определить, является ли данная инвестиция рентабельной, если требуемая норма прибыли на инвестицию составляет:

(**а**) 8%; (**б**) 12%.

Расчет дисконтированных потоков денежных средств представлен в табл. 7.3.

Таблица 7.3

Расчет дисконтированных потоков денежных средств

(**а**) Ставка дисконтирования = 8%			
Период	Чистые свободные средства, грн	Коэффициент дисконтирования	Дисконтированная стоимость, грн
Сейчас	-450000	1	-450000
Конец первого года	115000	0,9259	106479
Конец второго года	135000	0,8573	115736
Конец третьего года	145000	0,7938	115101
Конец четвертого года 160000		0,7350	117600
Чистая дисконтированная стоимость (ЧДС) = 4916			
(**б**) Ставка дисконтирования = 12%			
Период	Чистые свободные средства, грн	Коэффициент дисконтирования	Дисконтированная стоимость, грн
Сейчас	-450000	1	-450000
Конец первого года	115000	0,8929	102684
Конец второго года	135000	0,7972	107622

Конец третьего года	145000	0,7118	103211
Конец четвертого года 160000		0,6355	101680
Чистая дисконтированная стоимость (ЧДС) = -34803			

Так, при варианте (а) ЧДС является положительной, так что проект рентабельный, если требуемая норма прибыли на инвестицию составляет 8%. В варианте **(б)** ЧДС отрицательная, следовательно, если требуемая норма прибыли на инвестицию составляет 12%, то данный проект нерентабелен.

Мы можем задать вопрос: а при какой ставке дисконтирования чистая дисконтированная стоимость проекта будет равна нулю? Эта ставка дисконта и называется *внутренней нормой рентабельности* проекта.

Из расчетов, приведенных в табл. 7.3, можно сделать вывод, что внутренняя норма рентабельности данного проекта находится в интервале между 8 и 12%. Для более точного определения этой величины можно воспользоваться формулой (7.9).

Задание 7.7

Для данных о потоках денежных средств, показанных в табл. 7.3, рассчитайте ЧДС при ставке дисконта в 10%. (Возможно, вам понадобится провести дополнительные вычисления).

Вопросы и задания для самопроверки

1. В чем заключается сущность метода анализа безубыточности?
2. Что вы понимаете под точкой безубыточности?
3. Какие допущения предполагает анализ безубыточности?
4. Для чего проводится анализа чувствительности?
5. Объясните понятие «сложный процент»?
6. Как вы понимаете термин «будущая стоимость»?
7. Что показывает внутренняя норма рентабельности?
8. Как вы понимаете термин «ожидаемая денежная стоимость выплат», как она рассчитывается?

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Контрольное задание 1

Производитель бытовых кроватей «КБК» желает ввести в свой ассортимент новый продукт. Выбор продукта ограничен четырьмя вариантами, предложения показаны в табл. 7.4.

Таблица 7.4

«КБК»: выбор проекта внедрения нового вида продукции

(Для первого года производства)	«Банкетка»	«Роскошное ложе»	«Софа»	«Раскладной каньон»
Постоянные затраты, грн	23000	75000	45000	15000
Переменные издержки на единицу продукции, грн	54	120	62	40
Цена реализации единицы продукции, грн	350	1650	750	120
Пределы объема продаж, ед.	100-400	50-250	200-400	300-800
Прогнозируемый объем продаж	300	150	350	600

Менеджер компании твердо решил выбрать тот продукт, который может обеспечить хороший уровень прибыли. Однако затраты и объем продаж представляют собой теоретические расчеты, которые на практике могут не подтвердиться из-за влияния внешних факторов. Вполне возможно развитие событий по следующим сценариям:

Вариант 1

Спрос может сократиться на 15%.

Вариант 2

Спрос может увеличиться на 13%.

Вариант 3

Спрос может увеличиться на 8%.

Вариант 4

Цены на древесину могут подняться, в результате чего произойдет увеличение переменных издержек на 20%.

Вариант 5

Цены на комплектующие уменьшатся из-за оптовых закупок, в результате чего произойдет уменьшение переменных издержек на 3%.

Вариант 6

Зарплата рабочих может подняться, в результате чего произойдет увеличение переменных издержек на 10%.

Вариант 7

Клиенты покупают кровати только в периоды распродаж, когда компания специально снижает цены для розничных покупателей примерно на 5%.

Вариант 8

Клиенты покупают кровати только в периоды распродаж, когда компания специально снижает цены для розничных покупателей примерно на 12%.

Вариант 9

Более высокие, чем запланировано, расходы на техническое обслуживание оборудования могут повысить постоянные затраты на 5%.

Вариант 10

Более высокие, чем запланировано, расходы на приобретение дополнительного оборудования могут повысить постоянные затраты на 12%.

Проведите анализ возможных последствий наступления различных сценариев и дайте рекомендацию менеджеру компании о выборе наиболее перспективной продукции.

Контрольное задание 2

Руководство компании – владельца сети клубов «Премьер» присмотрело помещение в центре города для размещения клуба в рамках новой концепции «Досуг». Это здание в настоящее время принадлежит корпорации «Развитие города». Сеть «Премьер» имеет возможность либо выкупить это здание, либо взять его в аренду.

Если компания возьмет здание в аренду на условиях лизинга, арендная плата составит 35000 грн в год с выплатой авансом и пересмотром каждые пять лет. Компания считает, что во время первого пересмотра ставки арендной платы повышение составит 20%.

Покупка здания потребует единовременной выплаты 455000 грн, но затем компания будет обязана произвести ремонт здания, стоимость которого предварительно оценивается в 100000 грн.

Однако компания решает приобрести здание, произвести модернизацию интерьера, стоимость которой оценивается в 45000 грн. Оборудование бара и приобретение соответствующей обстановки потребуют затраты 14000 грн. Кроме того, потребуется дополнительный стартовый капитал в размере 25000 грн для закупки запасов, рекламы и финансирования прочих мелких расходов. Таким образом, дополнительные ежегодные постоянные производственные затраты будут такими, как показано в табл. 7.5.

Таблица 7.5

Компания – владелец сети клубов «Премьер»: постоянные расходы на содержание помещения

Коммунальные платежи	Грн
Ремонт	14000
Посуда и стаканы	6000
Моющие средства	1500
Местные налоги	900
Страховые взносы	13500
Расходы на ведение бухгалтерского учета	2500
Прочее	1000
Коммунальные платежи	11000

Когда клуб откроется и начнет работать, будет набран персонал на условиях неполного рабочего дня для обслуживания клиентов и уборки. В число работников полного рабочего дня включаются управляющий баром и шеф-повар. Постоянные затраты на рабочую силу составят 30000 грн в год. Переменные затраты на рабочую силу по смете составят 15% от объема продаж.

Прогноз продаж составляет 280000 грн в первый год, затем он увеличится на 15% во втором году и на 4% – в каждый последующий год. Исходя из прошлого опыта управления аналогичными заведениями, руководство компании ожидает, что себестоимость проданной продукции в среднем составит 40% объема продаж.

(а) Рассчитайте чистую дисконтированную стоимость ожидаемых потоков денежных средств, связанных с открытием и работой клуба, если:

• компания приобретет здание;

• компания возьмет здание в аренду.

Рассмотрите проект на восьмилетний период, начиная с года 1 и заканчивая годом 8. Предположим, что ставка дисконта 7%. Кроме того, рассчитайте внутреннюю норму рентабельности для каждого из двух вариантов действий компании. Считайте год, в котором были произведены все инвестиции, годом 0.

(б) Проведите анализ чувствительности для оценки влияния последствий следующих сценариев на чистую дисконтированную стоимость и внутреннюю норму рентабельности.

Вариант 1

В первый год объем продаж выше на 60000 грн, чем прогнозировалось.

Вариант 2

Объем продаж в первый год работы клуба на 40000 грн ниже прогнозируемого уровня.

Вариант 3

Объем продаж во второй год увеличился на 10%, а в последующие годы – на 3%.

Вариант 4

Себестоимость проданной продукции возросла до 35% от объема продаж.

Вариант 5

Себестоимость проданной продукции сократилась на 5% от объема продаж.

(в) Дайте компании «Премьер» рекомендацию относительно целесообразности приобретения или аренды здания.

Вариант 6

Затраты на ремонт оборудования увеличились на 680 грн, а коммунальные платежи снизились на 5%.

Вариант 7

На ремонт здания необходимо выделить 8000 грн за счет сокращения рабочей силы на 10%, а это приведет к экономии зарплаты на 5%.

Вариант 8

Постоянные зарплаты на рабочую силу увеличились на 4 %, а переменные уменьшились на 8%.

Вариант 9

Прогноз продаж в первый год снизился на 5%.

Вариант 10

Местные налоги увеличились в 1,2 раза, страховые взносы увеличились на 7%.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЭЛЕКТРОННЫХ ТАБЛИЦ

1. Анализ чувствительности

Создание шаблона

Шаблон для проведения анализа чувствительности показан в таблице 7.6 в варианте View Formula.

Шаблон состоит из трех частей.

Секция ввода данных

В эту часть шаблона вводят данные о нормативной величине затрат, цене реализации, объеме продаж, предусмотренные в первоначальном сценарии. Обратите внимание, что все необходимые исходные данные для расчета точки безубыточности и последующей оценки уровня прибыли перечислены в шаблоне в следующем порядке:

Секция анализа чувствительности

Эта часть шаблона отведена для изменений первоначального сценария. Данные, введенные в первую часть, здесь корректируются, чтобы соответствовать изменившимся обстоятельствам. Их набор аналогичен набору показателей в предыдущей секции.

Секция результатов

В этой части находятся формулы для проведения анализа безубыточности.

Внимательно посмотрев на табл. 7.6, вы обратите внимание на точность указания адресов ячеек в формулах для проведения вычислений.

Таблица 7.6

Шаблон для анализа чувствительности в электронных таблицах

	A	B
1	ВВОДИМЫЕ ДАННЫЕ	
2	Постоянные затраты	
3	Переменные издержки на единицу продукции	
4	Цена реализации единицы продукции	
5	Минимальный объем продаж (ед.)	
6	Максимальный объем продаж (ед.)	
7	Наиболее вероятный объем продаж (ед.)	
8		

9	АНАЛИЗ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ	СЦЕНАРИЙ 0
10	Описание изменений	Без изменений
11	Скорректированные вводные данные	
12	Постоянные затраты	
13	Переменные издержки на единицу продукции	
14	Цена реализации единицы продукции	
15	Минимальный объем продаж (ед.)	
16	Максимальный объем продаж (ед.)	
17	Наиболее вероятный объем продаж (ед.)	
18		
19	РЕЗУЛЬТАТЫ	
20	Удельная прибыль	= B14 – B13
21	Точка безубыточности (ед.)	= B12/B20
22	Точка безубыточности (грн)	= B21 × B14
23	Прибыль/Убыток при минимальном объеме продаж	= (B15 – B21) × B20
24	Прибыль/Убыток при максимальном объеме продаж	= (B16 – B21) × B20
25	Прибыль/Убыток при наиболее вероятном объеме продаж	= (B17 – B21) × B20

Скопируйте этот шаблон в вашей программе электронных таблиц. Как и в общем случае обращения с шаблонами, вы должны сохранить файл с рабочим листом в общем виде, а затем использовать его для конкретных вычислений, задав файлу другое имя.

В пределах одного применения шаблона мы можем скопировать формулы из колонки ***B*** в любое количество колонок, чтобы учесть все возможные изменения.

Использование шаблона

В качестве примера возьмем задание 7.3.

Используем шаблон для сравнения школы-студии и гимнастического зала. Предположим, что прогноз численности клиентов в школе-студии и в зале одинаков и колеблется между 250 и 500 с наиболее вероятным значением 400 чел.

В табл. 7.7 показаны результаты анализа школы-студии, а в табл. 7.8 – гимнастического зала. Обратите внимание, что данные в секции анализа чувствительности аналогичны данным в секции исходных данных, так как это первоначальный сценарий, называемый «Сценарий 0». Эти результаты согласуются с данными ручных расчетов.

Т а б л и ц а 7 . 7

Школа-студия: анализ безубыточности

	A	B
1	ВВОДИМЫЕ ДАННЫЕ	
2	Постоянные затраты	14500
3	Переменные издержки на единицу продукции	100
4	Цена реализации единицы продукции	150
5	Минимальный объем продаж (ед.)	250
6	Максимальный объем продаж (ед.)	500
7	Наиболее вероятный объем продаж (ед.)	400
8		
9	АНАЛИЗ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ	СЦЕНАРИЙ 0
10	Описание изменений	Без изменений
11	Скорректированные вводные данные	
12	Постоянные затраты	14500
13	Переменные издержки на единицу продукции	100
14	Цена реализации единицы продукции	150
15	Минимальный объем продаж (ед.)	250
16	Максимальный объем продаж (ед.)	500
17	Наиболее вероятный объем продаж (ед.)	400
18		
19	РЕЗУЛЬТАТЫ	
20	Удельная прибыль	50
21	Точка безубыточности (ед.)	290
22	Точка безубыточности (грн)	43500
23	Прибыль/Убыток при минимальном объеме продаж	-2000
24	Прибыль/Убыток при максимальном объеме продаж	10500
25	Прибыль/Убыток при наиболее вероятном объеме продаж	5500

Т а б л и ц а 7 . 8

Гимнастический зал: анализ безубыточности

	A	B
1	ВВОДИМЫЕ ДАННЫЕ	
2	Постоянные затраты	33000
3	Переменные издержки на единицу продукции	56
4	Цена реализации единицы продукции	150
5	Минимальный объем продаж (ед.)	250
6	Максимальный объем продаж (ед.)	500
7	Наиболее вероятный объем продаж (ед.)	400

8		
9	АНАЛИЗ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ	СЦЕНАРИЙ 0
10	Описание изменений	Без изменений
11	Скорректированные вводные данные	
12	Постоянные затраты	33000
13	Переменные издержки на единицу продукции	56
14	Цена реализации единицы продукции	150
15	Минимальный объем продаж (ед.)	250
16	Максимальный объем продаж (ед.)	500
17	Наиболее вероятный объем продаж (ед.)	400
18		
19	РЕЗУЛЬТАТЫ	
20	Удельная прибыль	94
21	Точка безубыточности (ед.)	351,06
22	Точка безубыточности (грн)	52659,57
23	Прибыль/Убыток при минимальном объеме продаж	-9500
24	Прибыль/Убыток при максимальном объеме продаж	14000
25	Прибыль/Убыток при наиболее вероятном объеме продаж	4600

Сейчас мы можем рассмотреть устойчивость студии и зала в условиях различных сценариев, т.е. различных показателей их деятельности.

Сценарий 1

Из-за недостатка фактора «хорошего самочувствия» (чувства удовлетворения) после занятий посещаемость обоих оздоровительных заведений сократилась на 10%.

Сценарий 2

Для того чтобы поддержать посещаемость и удержать клиентуру, оба заведения принимают решение о 10%-ном снижении годовой цены за членство в их заведениях.

Сценарий 3

Обе компании неверно рассчитали затраты на техническое обслуживание и ремонт оборудования. В результате постоянные затраты оказались на 10% выше, чем было заложено в первоначальные расчеты.

Анализ чувствительности для этих сценариев приведен в табл. 7.9 и 7.10.

Изучите эти таблицы и используйте полученные результаты для сравнения и сопоставления двух конкурентов.

Первое, что вы могли заметить, – это ущерб обоих конкурентов в случае наступления сценария с минимальным количеством клиентов, причем при любом сценарии потери значительнее, чем у школы-студии. Деятельность гимнастического зала очень уязвима в случае сценария с низким спросом на его услуги, так как у него очень высоки постоянные затраты. С другой стороны, если посещаемость будет на самом высоком прогнозном уровне, прибыль гимнастического зала значительно превысит прибыль школы-студии из-за более высокой удельной прибыли у Кирилла.

Если мы сосредоточим внимание на прибылях или убытках в случае наиболее вероятного числа клиентов, то тогда станут очевидными и другие различия.

В случае снижения числа клиентов, как предусмотрено сценарием 1, видно, что прибыли обоих сокращаются, при этом гимнастический зал более уязвим из-за более высокой, чем у школы-студии, удельной прибыли.

Снижать плату, как предусматривает сценарий 2, невыгодно обоим, так как они при этом терпят убытки. В обоих случаях удельная прибыль снижается до уровня, при котором невозможно покрыть постоянные затраты при ожидаемом уровне посещаемости.

В случае развития событий по сценарию 3, при котором увеличиваются постоянные затраты, прибыли гимнастического зала снизятся больше, чем у школы-студии, поскольку больше полагается на постоянные затраты.

Таблица 7.9

Школа-студия: анализ чувствительности

	A	B	C	D	E
1	ВВОДИМЫЕ ДАННЫЕ				
2	Постоянные затраты	14500			
3	Переменные издержки на единицу продукции	100			
4	Цена реализации единицы продукции	150			
5	Минимальный объем продаж (ед.)	250			
6	Максимальный объем продаж (ед.)	500			
7	Наиболее вероятный объем продаж (ед.)	400			
8					
9	АНАЛИЗ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ	СЦЕНАРИЙ 0	СЦЕНАРИЙ 1	СЦЕНАРИЙ 2	СЦЕНАРИЙ 3
10	Описание изменений	Без изменений	10%-ное снижение	10%-нос снижение	10%-ное повышение
11	Скорректированные вводные данные		в единицах	в цене	в постоянных затратах
12	Постоянные затраты	14500	14500	14500	15950
13	Переменные издержки на единицу продукции	100	100	100	100

14	Цена реализации единицы продукции	150	150	135	150
15	Минимальный объем продаж (ед.)	250	225	250	250
16	Максимальный объем продаж (ед.)	500	450	500	500
17	Наиболее вероятный объем продаж (ед.)	400	360	400	400
18					
19	РЕЗУЛЬТАТЫ				
20	Удельная прибыль	50	50	35	50
21	Точка безубыточности (ед.)	290,00	290,00	414,29	319,00
22	Точка безубыточности (грн)	43500,00	43500,00	55928,57	47850,00
23	Прибыль/Убыток при минимальном объеме продаж				
25	Прибыль/Убыток при максимальном объеме продаж				
25	Прибыль/Убыток при наиболее вероятном объеме продаж				

Таблица 7.10

Гимнастический зал: анализ чувствительности

	A	B	C	D	E
1	ВВОДИМЫЕ ДАННЫЕ				
2	Постоянные затраты	33000			
3	Переменные издержки на единицу продукции	56			
4	Цена реализации единицы продукции	150			
5	Минимальный объем продаж (ед.)	250			
	A	B	C	D	E
6	Максимальный объем продаж (ед.)	500			

7	Наиболее вероятный объем продаж (ед.)	400			
8					
9	АНАЛИЗ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ	СЦЕНАРИЙ 0	СЦЕНАРИЙ 1	СЦЕНАРИЙ 2	СЦЕНАРИЙ 3
10	Описание изменений	Без изменений	10%-ное снижение	10%-ное снижение	10%-ное повышение
11	Скорректированные вводные данные		в единицах	в цене	в постоянных затратах
12	Постоянные затраты	33000	33000	33000	36300
13	Переменные издержки на единицу продукции	56	56	56	56
14	Цена реализации единицы продукции	150	150	135	150
15	Минимальный объем продаж (ед.)	250	225	250	250
16	Максимальный объем продаж (ед.)	500	450	500	500
17	Наиболее вероятный объем продаж (ед.)	400	360	400	400
18					
19	РЕЗУЛЬТАТЫ				
20	Удельная прибыль	94	94	79	94
21	Точка безубыточности (ед.)	351,06	351,06	417,72	386,17
22	Точка безубыточности (грн)	52659,57	52659,57	56392,41	57925,53
23	Прибыль/Убыток при минимальном объеме продаж	-9500	-11850	-13250	-12800
24	Прибыль/Убыток при максимальном объеме продаж	14000	9300	6500	10700
25	Прибыль/Убыток при наиболее вероятном объеме продаж	4600	840	-1400	1300

2. Выработка долгосрочных решений с использованием электронных таблиц и анализа чувствительности

Рассмотрим следующий пример. Руководство компании хочет узнать чистую дисконтированную стоимость и внутреннюю норму рентабельности капиталовложения в размере 30000 грн, которые необходимо инвестировать в настоящее время; причем ожидаемые поступления от этой инвестиции составляют 5000 грн по окончании первого года, 10000 грн — по окончании второго года, 15000 грн — по окончании третьего и 10000 грн –. по окончании четвертого года. Дальнейших поступлений от данной инвестиции не будет. Ставка дисконта равна 10%.

Чистая дисконтированная стоимость

Для проведения соответствующих вычислений в электронных таблицах необходимо ввести данные о денежных потоках в ряд последующих ячеек либо в одном столбце, либо в одной строке электронной таблицы (табл. 7.11).

Таблица 7.11

Расчет чистой дисконтированной стоимомти: потоки денежных средств

	A	B
1	Ставка дисконта = 10%	
2	Период времени	Поток денежных средств, грн
3	Сейчас	– 30000
4	Конец первого года	5000
5	Конец второго года	10000
6	Конец третьего года	15000
7	Конец четвертого года	10000

Команда на проведение расчета чистой дисконтированной стоимости:

ЧПС (Ставка процента, Ряд потоков денежных средств).

Рассмотрим табл. 7.12, где рабочий лист переведен в режим показа формул, и введем в ячейку B8 формулу для расчета ЧДС:**= ЧПС(0,1,B3:B7)**

Таблица 7.12

Расчет чистой дисконтированной стоимости: режим показа формул

	A	B
1	Ставка дисконта = 10%	
2	Период времени	Поток денежных средств, грн
3	Сейчас	-30000
4	Конец первого года	5000
5	Конец второго года	10000
6	Конец третьего года	15000
7	Конец четвертого года	10000
8	ЧDС	= ЧПС(0,1,B3:B7)

Затем выйдем из режима показа формул и увидим результат, как в табл.

7.13, а именно 910 грн с точностью до целых.

Таблица 7.13

Расчет чистой дисконтированной стоимости

	A	B	
1	Ставка дисконта = 10%		
2	Период времени	Поток денежных средств, грн	
3	Сейчас	-30000	
4	Конец первого года	5000	
5	Конец второго года	10000	
6	Конец третьего года	15000	
7	Конец четвертого года	10000	
8	ЧDC	910	

Внутренняя норма рентабельности

Команда, необходимая для расчета внутренней нормы рентабельности (internal rate of return — IRR), выглядит так: IRR (Cash flow range).

Введем формулу для расчета ВСD (IRR) (табл 7.14), т.е. напечатаем в ячейке **В8 = ВСD (В3 : В7).**

Обратите внимание, что в данном случае первоначальные затраты капитала также включаются в ряд потоков денежных средств, и логика электронной таблицы требует, чтобы первоначальные затраты вводились как отрицательная величина.

Таблица 7.14

Расчет внутренней нормы рентабельности: режим показа формул

	A	B	
1	Ставка дисконта = 10%		
2	Период времени	Поток денежных средств, грн	
3	Сейчас	-30000	
4	Конец первого года	5000	
5	Конец второго года	10000	
6	Конец третьего года	15000	
7	Конец четвертого года	10000	
8	Внутр. норма рентабельности	= BCD(B3:B7)	

Итак, результат расчета электронной таблицы составляет 11,25% и представлен в виде процентов с округлением до второго десятичного знака (табл. 7.15). Обратите также внимание, что при использовании некоторых пакетов программ от вас требуется введение показателя ставки дисконта, так как электронная таблица рассчитывает внутреннюю норму рентабельности аналогично тому методу проб и ошибок, который мы рассматривали на лекции, поэтому программе требуется какой-то начальный показатель, чтобы начинать с него расчет. Обычно используется значение 0,1, т.е. 10%, но если это значение не подходит, последовательно предлагайте программе другие показатели до тех пор, пока она не рассчитает результат.

Таблица 7.15

Расчет внутренней нормы рентабельности

	A	B
1	Ставка дисконта = 10%	
2	Период времени	Поток денежных средств, грн
3	Сейчас	-30000
4	Конец первого года	5000
5	Конец второго года	10000
6	Конец третьего года	15000
7	Конец четвертого года	10000
8	Внутр. норма рентабельности	11,25%

Анализ чувствительности

Учитывая всю сложность современного мира бизнеса, мы не можем предполагать отсутствие каких-либо неожиданных изменений. Особенно при принятии долгосрочных решений нам требуется тщательно обдумывать и анализировать прогнозы и предположения, на которых они основываются, чтобы оценить степень последствий возможных изменений. Подобный анализ чувствительности удобно проводить в электронной таблице.

Для проведения оценки эффективности инвестиции мы должны сначала рассчитать чистую приведенную стоимость и внутреннюю норму рентабельности данного проекта в тех условиях, которые мы считаем наиболее вероятными. Затем мы рассматриваем возможные изменения начального сценария и делаем предположения о влиянии каждого отдельного изменения на сценарий в целом. Может оказаться, что проект в большей степени уязвим для одного фактора и менее уязвим для другого, и на этом основании делать более точный вывод о целесообразности продолжения инвестиционного проекта. Аналогичным образом мы можем оценить достоинства нескольких конкурирующих проектов в условиях изменения внешней среды и выявить их сильные и слабые стороны, прежде чем принимать окончательное решение.

Рассмотрим следующий пример. Необходимо составить бизнес-план для открытия собственной компании по производству мебели. Руководитель планирует производить мебель по заказам, предлагая свои услуги на выставках и при помощи устной рекламы. Менеджер уже располагает портфелем значительных заказов, и ее прогноз объема продаж утверждает, что в первый год ее деятельности объем продаж составит 18000 грн, увеличиваясь на 20% к концу второго года и еще на 30% – к концу третьего года, когда ее бизнес окончательно окрепнет и она приобретет известность.

Руководитель может изначально вложить в дело 1500 грн собственных сбережений; кроме того, ее бизнес удовлетворяет условиям выделения государственной льготы на поддержание малого бизнеса в размере 50 грн в неделю на первые три года деятельности, а также дополнительно 30 грн в неделю в течение первого года в качестве помощи в оплате аренды мастерской в здании, спонсируемом в рамках той же государственной программы.

Руководитель произвела расчет затрат для своего начинания. Ей потребуется закупить оборудование и различные приспособления, перечисленные в табл. 7.16.

Таблица 7.16

Первоначальные закупки

Основное производственное оборудование	150
Набор рубанков	30
Набор резцов, стамесок и долот	40
Рабочий верстак	85
Стеллажи для инструмента	35
Статья закупок	Предполагаемая стоимость, грн
Аптечка первой помощи	25
Защитная маска для лица и защитные очки	25
Опилкоотражатель	350
Пылепоглощающее оборудование	90

Арендная плата за мастерскую составляет 32 грн в неделю, страховые выплаты – 150 грн в год, стоимость коммунальных услуг – 450 грн в год, местные налоги – 500 грн в год. Руководителю потребуется установка телефона, что обойдется ей в 99 грн, а оплата за него, по ее подсчетам, должна составить 400 грн в год.

Себестоимость производства продукции оценивается в 30% выручки от продаж.

Директор намеревается ежегодно изымать из дела 12000 грн. Он полагает, что это справедливое вознаграждение, основываясь на том, что аналогичную сумму она смогла бы получать, работая по найму.

Денежные сбережения руководителя (1500 грн) помещены в банк на депозитный счет под 6% годовых, причем это сложный процент. Должен ли он вложить эти средства в свой бизнес или лучше оставить их на банковском счете? Директор хочет оценить относительные преимущества каждого из этих вариантов на период три года.

Чтобы принять решение, необходимо создать рабочий лист (табл. 7.17).

В первой части рабочего листа должны находиться первоначальные затраты Анны, и мы используем команду SUM для получения итоговой суммы затрат.

Затем вносим информацию о предполагаемых поступлениях за первые три года, полученную в результате расчетов объема продаж за второй и третий годы на основе данных прогноза на первый год.

Таблица 7.17

Анализ дисконтированных потоков денежных средств

(а) Первоначальные затраты за год 0	Грн		
Основное производственное оборудование	150		
Набор рубанков	30		
Набор резцов, стамесок и долот	40		
Рабочий верстак	85		
Стеллажи для инструмента	35		
Аптечка первой помощи	25		
Защитная маска для лица и защитные очки	25		
Опилкоотражатель	350		
Пылепоглощающее оборудование	90		
Установка телефона	99		
Итого	929		
(б) Ежегодный доход, грн	Год 1	Год 2	Год 3
Объем продаж	18000	21600	28080
Государственный грант	2600	2600	2600
Дополнительный грант	1560		
Итого	22160	24200	30680
(в) Ежегодные расходы, грн	Год 1	Год 2	Год 3
Арендная плата	1664	1664	1664
Страховка	150	150	150
Оплата коммунальных услуг	450	450	450
Местные налоги	500	500	500
Оплата за пользование телефоном	400	400	400
Производственные затраты	5400	6480	8424
Изъятие средств (вознаграждение Анны)	12000	12000	12000
Итого	20564	21644	23588

(г) Анализ дисконтированных потоков денежных средств			
Год	Приток ден. средств, грн	Затраты ден. средств, грн	Чистые свободные средства, грн
0		929	-929
1	22160	20564	1596
2	24200	21644	2556
3	30680	23588	7092
Чистая дисконтированная стоимость			8806

Для нахождения итоговой суммы за год 1 используется команда SUM.

Для введения данных следующих лет, которые сохранили свое значение, и для проведения аналогичных расчетов мы можем использовать функцию Копировать (Copy). Результаты показаны в табл. 7.20.

Следующая часть рабочего листа отражает расходы за каждый рассматриваемый год. Данные о производственных затратах мы вводим в виде формулы, так как на каждый год их доля в объеме продаж остается без изменений.

Наконец, мы можем приступить к анализу дисконтированных потоков денежных средств. Для этого вводим уже рассчитанные нами данные о поступлениях и затратах средств за каждый год. Причем мы вводим не столько цифры, сколько адреса соответствующих ячеек. Затем пишем формулу для расчета чистых свободных средств на год 0, и эта формула копируется для всех следующих лет. Далее применяем команду ЧПС для ставки дисконта 6%.

Итоговая чистая дисконтированная стоимость составляет 8806 грн. Это гораздо выше, чем начальная сумма в 1500 грн, представляющая собой текущую стоимость инвестиции директора в случае, если он просто оставит эту сумму на банковском счете при ставке процента 6%. Отсюда следует, что руководитель должен открыть свою мастерскую.

Однако анализ, проведенный в табл. 7.17, рассматривает только один вариант развития событий.

Прежде чем дать директору рекомендацию продолжать проект открытия мастерской, необходимо исследовать последствия возможных изменений в расчетах. Рассмотрим четыре возможных варианта развития событий:

Сценарий 1

Объем продаж в первый год составит 10000 грн, а затем будет расти в соответствии с начальным прогнозом.

Сценарий 2

Объем продаж в первый год составит прогнозируемые 18000 грн, но во второй год увеличится только на 10%, а в третий год — на 20%.

Сценарий 3

Ставка арендной платы и ставки местных налогов могут возрастать на 4% ежегодно, причем размеры основного и дополнительного грантов не увеличатся.

Сценарий 4

Производственные затраты могут возрасти, и директор не сможет выполнить в полном объеме заказы клиентов. Это может означать рост доли производственных затрат в объеме продаж до 35%.

Таблица 7.18

Сценарий 1

(а) Первоначальные затраты за год 0	Грн		
Основное производственное оборудование	150		
Набор рубанков	30		
Набор резцов, стамесок и долот	40		
Рабочий верстак	85		
Стеллажи для инструмента	35		
Аптечка первой помощи	25		
Защитная маска для лица и защитные очки	25		
Опилкоотражатель	350		
Пылепоглощающее оборудование	90		
Установка телефона	99		
Итого	929		
(б) Ежегодный доход, грн	Год 1	Год 2	Год 3
Объем продаж	10000	12000	15600
Государственный грант	2600	2600	2600
Дополнительный грант	1560		
Итого	14160	14600	18200
(в) Ежегодные расходы, грн	Год 1	Год 2	Год 3
Арендная плата	1664	1664	1664
Страховка	150	150	150
Оплата коммунальных услуг	450	450	450
Местные налоги	500	500	500
Оплата за пользование телефоном	400	400	400
Производственные затраты	3000	3600	4680
Изъятие средств (вознаграждение)	12000	12000	12000
Итого	18164	18764	19844
(г) Анализ дисконтированных потоков денежных средств			

Год	Приток денежных средств, грн	Затраты денежных средств, грн	Чистые свободные средства, грн
0		929	-929
1	14160	18164	-4004
2	14600	18764	-4164
3	18200	19844	-1644
Чистая дисконтированная стоимость			-9793

В табл. 7.18 – 7.21 показаны последствия этих изменений по сравнению с первоначальным сценарием. В каждом случае мы просто вносим соответствующие изменения в первоначальный рабочий лист. Электронная таблица автоматически производит корректирующие расчеты и показывает новые значения итоговых сумм и ЧДС.

Таблица 7.19

Сценарий 2

(а) Первоначальные затраты за год 0	Грн		
Основное производственное оборудование	150		
Набор рубанков	30		
Набор резцов, стамесок и долот	40		
Рабочий верстак	85		
Стеллажи для инструмента	35		
Аптечка первой помощи	25		
Защитная маска для лица и защитные очки	25		
Опилкоотражатель	350		
Пылепоглощающее оборудование	90		
Установка телефона	99		
Итого	929		
(б) Ежегодный доход, грн	Год 1	Год 2	Год 3
Объем продаж	18000	19800	23760
Государственный грант	2600	2600	2600
Дополнительный грант	1560		
Итого	22160	22400	26360

(в) Ежегодные расходы, грн	Год 1	Год 2	Год 3
Арендная плата	1664	1664	1664
Страховка	150	150	150
Оплата коммунальных услуг	450	450	450
Местные налоги	500	500	500
Оплата за пользование телефоном	400	400	400
Производственные затраты	6300	5940	7128
Изъятие средств (вознаграждение)	12000	12000	12000
Итого	20564	21104	22292

(г) Анализ дисконтированных потоков денежных средств			
Год	Приток денежных средств, грн	Затраты денежных средств, грн	Чистые свободные средства, грн
0		929	-929
1	22160	20564	1596
2	22400	21104	1296
3	26360	22292	4068
Чистая дисконтированная стоимость			5146

Таблица 7.20

Сценарий 3

(а) Первоначальные затраты за год 0	грн		
Основное производ. оборудование	150		
Набор рубанков	30		
Набор резцов, стамесок и долот	40		
Рабочий верстак	85		
Стеллажи для инструмента	35		
Аптечка первой помощи	25		
Защитная маска для лица и защитные очки	25		
Опилкоотражатель	350		
Пылепоглощающее оборудование	90		
Установка телефона	99		

Итого	929		
(б) Ежегодный доход, грн	Год 1	Год 2	Год 3
Объем продаж	18000	21600	28080
Государственный грант	2600	2600	2600
Дополнительный грант	1560		
Итого	22160	24200	30680
(в) Ежегодные расходы, грн.	Год 1	Год 2	Год 3
Арендная плата	1664	1731	1800
Страховка	150	150	150
Оплата коммунальных услуг	450	450	450
Местные налоги	500	500	500
Оплата за пользование телефоном	400	400	400
Производственные затраты	5400	6480	8424
Изъятие средств (вознаграждение)	12000	12000	12000
Итого	20564	21711	23724

(г) Анализ дисконтированных потоков денежных средств			
Год	Приток денежных средств, грн	Затраты денежных средств, грн	Чистые свободные ср-ва, грн
0		929	-929
1	22160	20564	1596
2	24200	21711	2489
3	30680	23724	6956
Чистая дискон. стоимость			8633

Таблица 7.21

Сценарий 4

(а) Первоначальные затраты за год 0	Грн		
Основное производств. оборудование	150		
Набор рубанков	30		
Набор резцов, стамесок и долот	40		
Рабочий верстак	85		
Стеллажи для инструмента	35		
Аптечка первой помощи	25		
Защитная маска для лица и защ. очки	25		
Опилкоотражатель	350		
Пылепоглощающее оборудование	90		
Установка телефона	99		

Итого	929		
(б) Ежегодный доход, грн	Год 1	Год 2	Год 3
Объем продаж	18000	21600	28080
Государственный грант	2600	2600	2600
Дополнительный грант	1560		
Итого	22160	24200	30680
(в) Ежегодные расходы, грн	Год 1	Год 2	Год 3
Арендная плата	1664	1664	1664
Страховка	150	150	150
Оплата коммунальных услуг	450	450	450
Местные налоги	500	500	500
Оплата за пользование телефоном	400	400	400
Производственные затраты	6300	7560	9828
Изъятие средств (вознаграждение)	12000	12000	12000
Итого	21464	22724	24992
г) Анализ дисконтированных потоков денежных средств			

Год	Приток ден. средств, грн	Затраты ден. средств, грн	Чистые свободные ср-ва, грн
0		929	-929
1	22160	21464	696
2	24200	22724	1476
3	30680	24992	5688
Чистая дисконтированная стоимость			5917

Изучив полученные результаты, можно сделать вывод, что хотя в каждом из этих случаев итоговый результат ниже первоначального только в случае развития сценария, предусматривающего более низкий объем продаж в первый год, у директора есть повод для беспокойства. При всех других сценариях чистая дисконтированная стоимость гораздо выше, чем 1500 грн, так что директору не стоит беспокоиться, если объем продаж будет расти не так быстро, как запланировано, либо возрастет если возрастет ставка арендной платы, или доля производственных затрат. Единственно, чего следует опасаться, – более низкого, чем прогнозируется, объема продаж в первый год его деятельности. Если существует какая-либо вероятность, что объем продаж в первый год может составить всего 10000 грн, то не следует продолжать осуществление проекта. Известно, что у директора есть значительный портфель заказов, так что изначально он с достаточной долей уверенности предполагает, что объем продаж в первый год достигнет 18000 грн, но он проявит предусмотрительность, если убедится, что заказы подтверждаются в письменной форме, прежде чем продолжать проект.

Литература

1. Баканов М.И., Шеремет А.Д. Теория экономического анализа: Учебник.— М.: Финансы и статистика, 1994.
2. Васильев Г.А., Осипова Л.В. Организация и планирование снабжения и сбыта на предприятии. — М.: ВЗФЭИ, 1987.
3. Карасев А.И., Кремер Н.Ш., Савельева Т.И. Математические методы и модели планирования: Учеб. пособие. — М.: Экономика, 1987.
4. Ковалев В.В. Финансовый анализ: Управление капиталом. Выбор инвестиций. Анализ отчетности. – 2-е изд., пераб. и доп. - М.: Финансы и статистика, 1999
5. Ковальков Ю.А., Дмитрев О.Н. Эффективные технологии маркетинга. — М.: Машиностроение, 1994.
6. Кофман А. Методы и модели исследования операций/Пер. с франц. – М.: Мир, 1966.
7. Маркетинг: Учебник для вузов /Под ред. Н.Д. Эриашвили. – 2-е изд., перераб. и доп. — М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2000.
8. Мельник М.М. Экономико-математические методы и модели в планировании и управлении материально-техническим снабжением: Учеб. для экон. спец. вузов. — М.: Высшая школа, 1990.
9. Практическая бизнес-статистика.: Пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2002. – 1056 с.: ил. – Парал. тит. англ.
10. Стоянова Е.С. Финансы маркетинга. — М.: Перспектива, 1994.
11. Финансовый менеджмент/ Под ред. Е.С. Стояновой. – 5-е изд., перераб. и доп. – М.: Перспектива, 2000.
12. Черчмен У., Акоф Р., Арноф Л., Введение в исследование операций/Пер. с англ. – М.: Наука, 1968.
13. Хазанова Л.Э. Математическое моделирование в экономике. М.: БЕК, 1998.
14. Четыркин Е.М. Методы финансовых и коммерческих расчетов. М.: Дело, 1992
15. Четыркин Е.М. Статистичекие методы прогнозирования. М.: Статистика, 1997.
16. Шелобаев С.И. Математические методы и модели: Учеб. Пособие. М.: ЮНИТИ, 2000.
17. Экономико-математические методы и прикладные модели: Учебно-методическое пособие./Под ред. В.А. Половникова и др. М.: Финстатинформ, 1997.
18. Экономико-математические методы и прикладные модели / Под ред. В.В. Федосеева. М.: ЮНИТИ, 1999.

Н а в ч а л ь н е   в и д а н н я

РАМАЗАНОВ Султанахмед Курбанович
РЯЗАНЦЕВА Наталя Олександрівна
ЛЯШЕНКО Татяна Валеріївна
МУСАЄВА Евелина Касімівна

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ В МЕНЕДЖМЕНТІ ТА МАРКЕТИНГУ

Редактор ______________
Техн. редактор ______________
Оригінал-макет ______________

Підписано до друку ________
Формат 60×84 1/16 Папір типограф. Гарнітура Times.
Друк офсетний. Умов. друк. арк. ______. Обл.-вид. арк. ______.
Тираж ____ екз. Вид. № ______. Замов № _______. Ціна договірна.

Видавництво Східноукраїнського національного
університету імені Володимира Даля

Адреса видавництва : 91034, м. Луганськ, кв. Молодіжний, 20а
Телефон: 8 (0642) 41-34-12, **факс**. 8 (0642) 41-31-60
E-mail: uni@snu.edu.ua **http**: www.snu.edu.ua